Α.Π. 3 | 7-10-19

1ο Μάθημα.

<u>Παράδειγμα:</u>

(1): $\underset{\in\mathbb{R}}{z} = \underbrace{\underset{\in\mathbb{R}}{x} + 2\underset{\in\mathbb{R}}{y}}_{f(x,y)}$, $x,y\in\mathbb{R}$ $(\Leftrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2)$

Αυτή η εξίσωση (1) περιγράφει ένα επίπεδο στου $\mathbb{R}^3$, δηλ.

το σύνολο $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x+2y\}$

$$= \{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

είναι το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x+2y$.

Η f είναι μια πραγματική συνάρτηση (δηλ. έχει τιμές στου $\mathbb{R}$) δύο (ανεξάρτητων) πραγματικών μεταβλητών.

<u>Παρατήρηση:</u> Στου Α.Λ. ΙΙΙ τέτοιες συναρτήσεις είναι η απλούστερη περίπτωση πραγματικών συναρτήσεων περισσότερων (από τη μια) πραγματικών μεταβλητών.

$\boxed{\text{S.O.S.}}$: Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν το πρότυπο για γενικότερες πραγματικές συναρτήσεις n (ανεξ., πραγμ.) μεταβλητών

$\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$, όπου $\vec{x}\in U\subset\mathbb{R}^n$

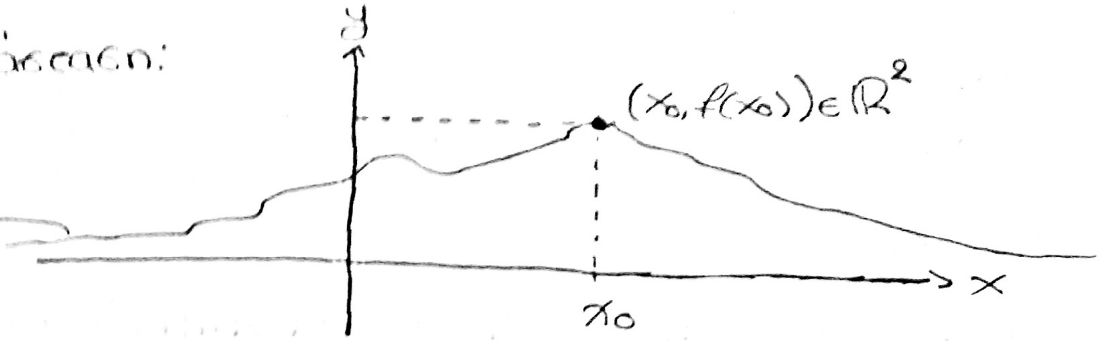
(και όπου $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$). Πρέπει να «καταλάβουμε» τις συναρτήσεις για $n=2$, $f(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$ για $(x_1,x_2)\in U\subset\mathbb{R}^2$

όπου συνήθως $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Πίσω στο παράδειγμα: $f(x,y) = x+2y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Σχολείο / 1ο έτος: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ ανεξ. μετ. $f(x)=y\in\mathbb{R}$ εξαρτ. μετ.

Γραφική παράσταση:



Γράφημα της $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\Gamma_f=\{(\underset{\in\mathbb{R}}{x}, \underset{\in\mathbb{R}}{f(x)}): x\in\mathbb{R}\}\in\mathbb{R}^2$

Εδώ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ή γενικότερα, $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\forall\ \underbrace{\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in U\subset\mathbb{R}^n}_{\substack{\text{Διάνυσμα στον } \mathbb{R}^n}}\ \exists!\ \underbrace{f(\vec{x})=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}}_{\circledast}$$

με συντεταγμένες $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$

[Το $\vec{x}\in U$ είναι το όρισμα (argument) της f, το U το πεδίο ορισμού τη

$\circledast$ Πραγματική τιμή της f [Το $f(U)=\{f(\vec{x}):\vec{x}\in U\}\subset\mathbb{R}$ είναι η εικόνα της f]

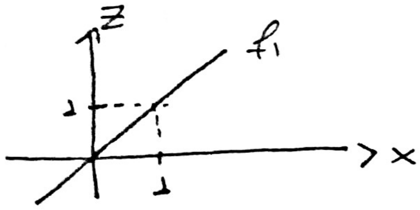
Το γράφημα της f είναι $\Gamma_f=\{\underbrace{(\underset{\in\mathbb{R}^n}{\vec{x}}, \underset{\in\mathbb{R}^n}{f(\vec{x})})}_{\in\mathbb{R}^{n+1}}: \underset{\subset\mathbb{R}^n}{\vec{x}\in U}\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$

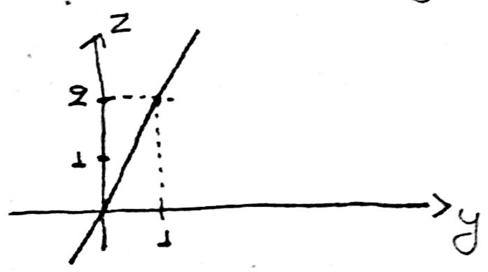
$\boxed{\text{S.O.S.}}$: Γραφική παράσταση στον $\mathbb{R}^{n+1}$ μπορώ να κάνω με την κλασσική έννοια μόνο για $n=2$, [και μάλιστα ακριβής γραφική παράσταση για $n=2$ μπορεί να γίνει μόνο ως «μακέτα» στον $\mathbb{R}^3$.

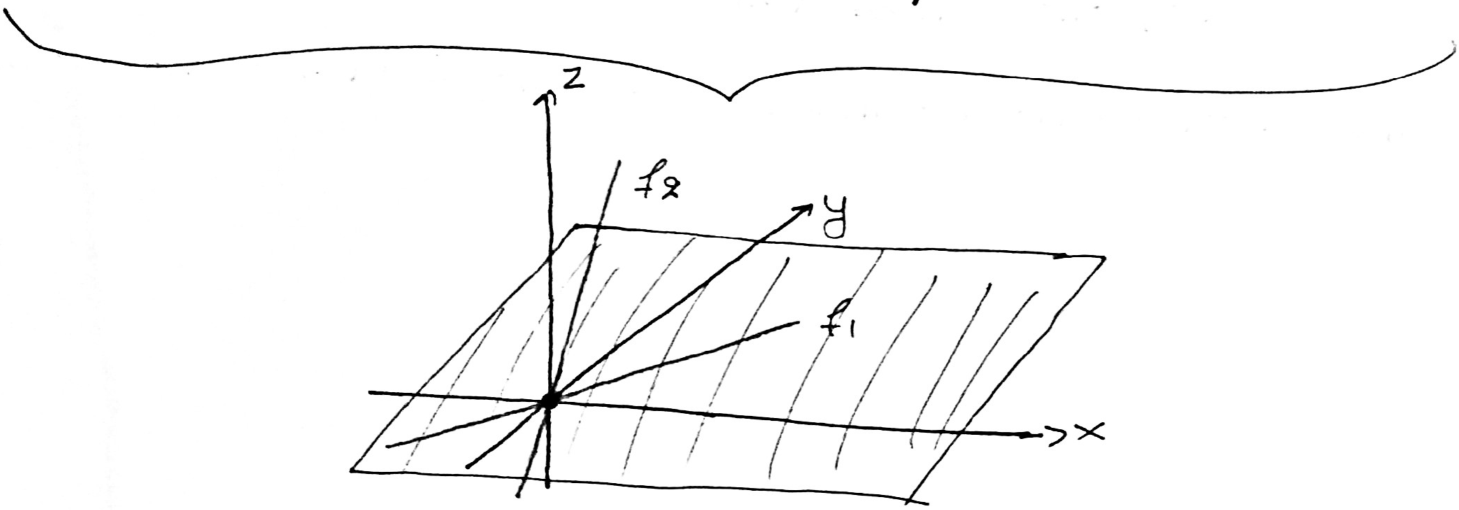
Στο παράδειγμα για $n=2$: $\underbrace{f(x,y)}_{=z} = x+2y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f_1(x) = f(x,0) = x$, $x\in\mathbb{R}$, $f_2(y) = f(0,y) = 2y$, $y\in\mathbb{R}$

$\boxed{y=0}$







Επί τη ευκαιρία (θα δούμε αργότερα πιο "επίσημα")

Η $f(x,y)=x+2y$, έχει στο σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$ τη μερική παράγωγο ως προς x $\frac{df}{dx}(0,0) = f_1'(x)$, όπου $f_1(x) = f(x,\underset{y_0}{\underset{\shortparallel}{0}})$

και τη μερική παράγωγο ως προς y $\frac{df}{dy}(0,0) = f_2'(y)$, όπου $f_2(y) = f(\underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{0}},y)$. Το διάνυσμα στο σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$

$\left(\frac{df}{dx}(0,0), \frac{df}{dy}(0,0)\right)\in\mathbb{R}^2$ ονομάζεται κλίση (ή βάθμωση, gradient) της f στο $(0,0)$ $= \text{grad}\, f(0,0) =: \nabla f(0,0)$, όπου $\nabla = \left(\frac{d}{dx},\frac{d}{dy}\right)$ είναι το ανάδελτα.

S.O.S. : Προσοχή, το ανάδελτα ∇ είναι ένα σύμβολο (τελεστής) που χρησιμοποιούμε <u>όχι μόνο</u> για το grad.

18-10-14

Α.Π.3: 2ο Μάθημα.

Κεφ. 1: Εισαγωγή / Κίνητρα (συνέχεια)

Τι κάνουμε στον Α.Λ. ΙΙΙ (και IV); Εξετάζουμε συναρτήσεις περισσότερων πραγματικών μεταβλητών (εξαρτημένων ή/και ανεξάρτητων)

δηλαδή: ⓐ $f: U \to \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^n$ (πραγματικών συναρτήσεων ή ανεξάρτητων πραγμ. μεταβλητών), $n \geq 2$

Παράδειγμα: η θερμοκρασία $T(x,y,z) \in \mathbb{R}$, σε κάθε σημείο $(x,y,z) \in U$ = Αμφ.3 $\subset \mathbb{R}^2$

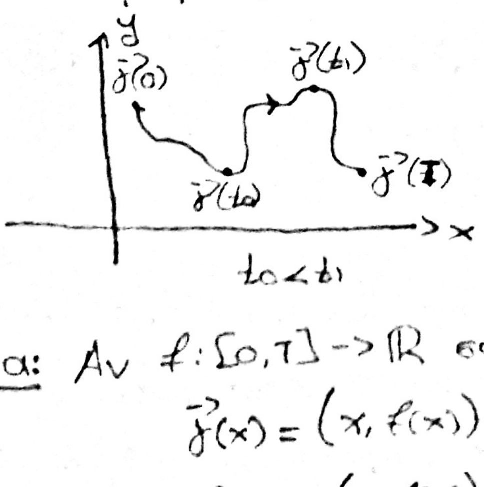
ⓑ $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \in \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Αν $n=m$ η διανυσματική συνάρτηση $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο.

Παράδειγμα: $\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ η ταχύτητα του αέρα σε κάθε σημείο $(x,y,z) \in U$, U = Αμφ.3 $\subset \mathbb{R}^2$

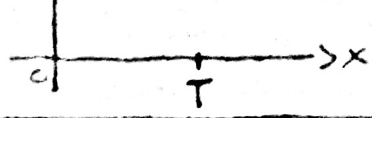
ⓒ $\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, (Αν είναι «συνεχής» τότε ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$

Για $\boxed{n=2}$



είναι μια παραμετρική καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$

Παράδειγμα: Αν $f: [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής



$\vec{\gamma}(x) = (x, f(x))$, $x \in [0,T]$

$\vec{\gamma}(t) = (t, f(t))$, $t \in [0,T]$

Η εικόνα της $\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\vec{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

<u>Παρατήρηση:</u> Ειδική περίπτωση διανυσματικής συνάρτησης είναι ένα τμήμα παραμετρικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\underbrace{x^2+y^2+z^2}=1$ (μοναδιαία σφαίρα με κέντρο $(0,0,0)$ στον $\mathbb{R}^3$)

$$\hookrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z^2 = 1-(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

Άρα το άνω ημισφαίριο (όπου $z \geq 0$) δίνεται από την συνάρτηση

$$\underset{\in\mathbb{R}}{f(x,y)} = \sqrt{1-(x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in \vec{B}((0,0),1) \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad \underbrace{(x,y) \in \vec{B}((0,0),1)}_{=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq 1\}}$$

$$\left(\Leftrightarrow \vec{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \text{ με } x(u,v)=u,\ y(u,v)=v,\ z(u,v)=f(u,v) \right)$$

Αυτή είναι η παραμετρική επιφάνεια του άνω ημισφαιρίου. Το άνω ημισφαίριο είναι η εικόνα της $\vec{\phi}$, $\vec{\phi}(B((0,0),1)) \subset \mathbb{R}^3$ το οποίο ταυτίζεται με το γράφημα της f, $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \vec{B}((0,0),1)\}$

[Παρατηρούμε ότι για την παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης χρειαζόμαστε (και αρκεί) μια πραγματική μεταβλητή, ενώ για την παραμ/ποίηση μιας επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$, χρειαζόμαστε (και αρκούν) δύο πραγμ. μεταβλητές $\Rightarrow$ Καμπύλη είναι κάτι «μονοδιάστατο». Επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ κάτι «διδιάστατο»

($\Rightarrow S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=1\}$ συνάρτηση $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$)

S.O.S : Συνεπώς ο Α.Λ. ΙΙΙ

α) Είναι εισαγωγή για Α.Λ. IV, Διαφ. Γεωμ., Κλασ. Μηχ., Μιγ. Συν.

β) Απαιτεί συνδυασμό Αναλ. Γεωμ., Γραμμ. Ι, ΙΙ, Α.Λ. Ι, ΙΙ

γ) Εξετάζει τις αναλυτικές ιδιότητες (όρια, συνέχεια, διαφορισιμότητα)

δ) Για $n=m=1$ έχουμε τις γνωστές συναρτήσεις.

ε) Μας ενδιαφέρει η μεταβολή αυτών των συναρτήσεων.

στ) Πως διαβάζουμε: α') Παρακολουθούμε

β') Διαβάζουμε τις σημειώσεις μας (Καταλαβαίνουμε τα παραδείγματα)

γ') Κοιτάμε τι λένε οι σημειώσεις «Διανυσματική Ανάλυση» και λύνουμε αντίστοιχες ασκήσεις.

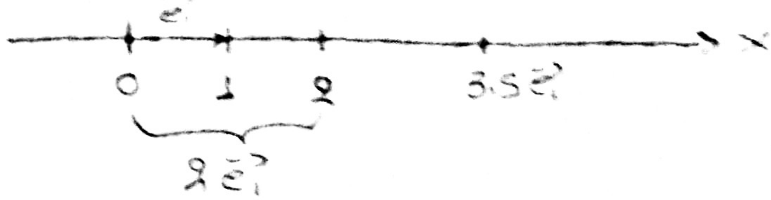
<u>Προσοχή</u>: Δεν είναι όλη η ύλη των σημειώσεων Δ.Α. εξεταστέα ύλη.

δ') <u>Εύδοξος</u>: • Marsden Tromba Διανυσματικός Λογισμός (και για Α.Λ. IV)

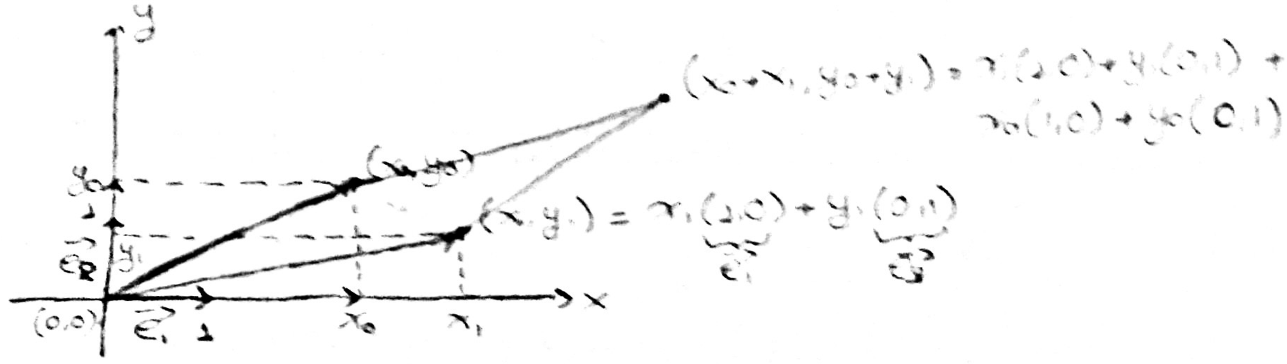
• W Rudin, Αρχές Μαθηματικής Ανάλυσης.

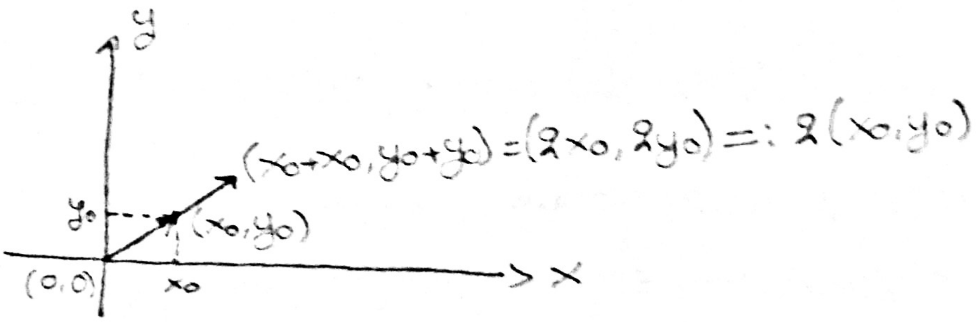
<u>Κεφάλαιο 2: Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$</u>: Για να μπορούμε να μιλάμε για συγκεκριμένα σημεία του χώρου ($\mathbb{R}^n$) πρέπει να εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων και μια μονάδα απόστασης.

$\boxed{n=1}$



$\boxed{n=2}$





$$\|(x_0,y_0)-(0,0)\| = \|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$$

Ευκλείδια νόρμα του $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ = απόσταση του σημείου (x,y) από το $(0,0)$.

$\boxed{S.O.S}$: Το αποτέλεσμα των προηγούμενων διαισθητικών θεωρήσεων οδηγεί, στην ακόλουθη γεωμετρική-αλγεβρική δομή του χώρου $\mathbb{R}^n$.

1. Κάθε «σημείο» του $\mathbb{R}^n$ (γεωμετρικά, για $n=1,2,3$) αντιστοιχεί / ταυτίζεται σε / με ένα μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_i\in\mathbb{R}$ (ως προς την συνήθη ορθοκανονική βάση $\vec{e}_1=(1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\dots,0)$ κλπ $\boxed{n=2}$

2. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης $+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ και του βαθμωτού πολ/μού $\cdot:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, οι οποίες ορίζονται κατά σημείο ως εξής: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n):=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
$a\vec{x}=a(x_1,\dots,x_n):=(ax_1,\dots,ax_n)$, $a\in\mathbb{R}$.

και γίνεται ένας διανυσματικός χώρος (διάστασης n). Πάνω από το $\mathbb{R}$!

<u>Άσκηση</u>: Τσεκάρετε ότι με αυτές τις πράξεις (και γνωρίζοντας τις ιδιότητες των πράξεων στο $\mathbb{R}$) ο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι πράγματι διαν. χώρος.

3. Εισάγουμε στον διαν. χώρο $\mathbb{R}^n$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο: $\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (για τη γεωμ. ερμηνεία βλέπε μετά)

δηλαδή μια πράξη (απεικόνιση) $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με τις ιδιότητες:

- Συμμετρία: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$
- Γραμμικότητα (ως προς πρώτο όρισμα): $(a\vec{x}+b\vec{y})\cdot\vec{z} =$

$$= a(\vec{x}\cdot\vec{z}) + b(\vec{y}\cdot\vec{z}), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

και το «θετικά ορισμένο»: $\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{x} \geq 0 \quad \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n \\ \text{και} \quad \underbrace{\vec{x}\cdot\vec{x}}_{=\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0,\dots,0) \end{cases}$

4. Το εσωτ. γινόμενο (*) επάγει την Ευκλείδια νόρμα:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (**)$$

η οποία είναι μια νόρμα (ενός διαν. χώρου) δηλαδή μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες την αρνητικότητα $\|\vec{x}\| \geq 0 \ \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, απόλυτη ομογένεια $\|a\vec{x}\| = |a|\cdot\|\vec{x}\|$.

και την τριγωνική ανισότητα $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ SUPER DUPER SOS

<u>Άσκηση</u>: Τσεκάρετε ότι η Ευκλείδια νόρμα (**) έχει τις δύο πρώτες ιδιότητες.

Για να δείξουμε την τριγ. ανισότητα χρειαζόμαστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz : $\|\vec{x}\cdot\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ SUPER SOS.

<u>Άσκηση</u>: Δείτε την απόδειξη στις σημειώσεις της Δ.Α. και αποδείξεις με αυτήν την τριγ. ανισότητα.

5. Η Ευκλείδια νόρμα (**) επάγει μια απόσταση (ή μετρική) δηλ. μια απεικόνιση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, η οποία έχει τις ιδιότητες συμμετρίας $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$, $d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0 \iff \vec{x}=\vec{y}$, τριγ. ανισότητα: $d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$.

[Με το 4. ο $\mathbb{R}^n$ γίνεται χώρος με νόρμα, με το 5. γίνεται μετρικός χώρος.]

[<u>Άσκηση</u>: Κοιτάξτε σημειώσεις Δ.Α. έως άσκηση 6]

<u>Παρατήρηση</u>: Η τριγωνική ανισότητα της Ευκλείδιας μετρικής μας λέει $\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\|$

<u>Ερώτηση</u>: Γιατί ισχύει αυτό; Τι σημαίνει γεωμετρικά π.χ. στον $\mathbb{R}^2$;

Α.Π. 3 | 14-10-19
3ο Μάθημα.

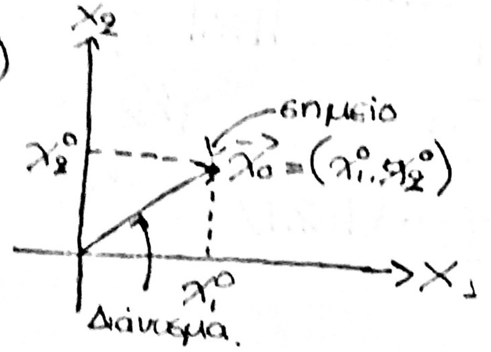
Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε δύο πράξεις (+ και • με πραγματικό αριθμό (η διαθμωτό μέγεθος)), εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, νόρμα (=μήκος) ενός διανύσματος, απόσταση δύο διανυσμάτων

Ισχυρισμός: Με όλα αυτά μπορούμε να περιγράψουμε επαρκώς τον γεωμετρικό χώρο $\mathbb{R}^n$

SOS

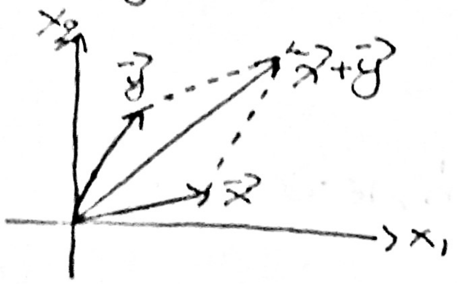
Παράδειγμα για τον $\mathbb{R}^2$:

a)

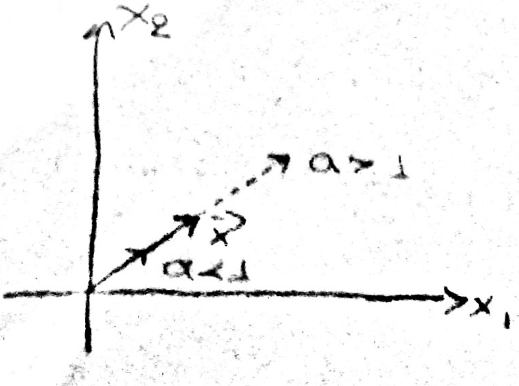


"1-1" αντιστοίχιση σημείων με διανύσματα.

b) $\vec{x}+\vec{y}$ (αλγεβρικά)

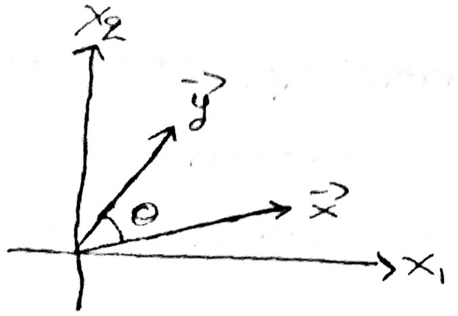


c) Πολλ. διανύσματος με αριθμό.
(αλγεβρικά) $a\vec{x}$, όπου $a \in \mathbb{R}$



α) Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(αλγεβρικά)



$$\cos\theta \underset{\uparrow}{=} \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}, \text{ όπου } \|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$$

αν $\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|>0$ (γεωμετρικά)

Παρατηρούμε ότι $\left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|=1 \quad \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\} \Leftrightarrow \|\vec{x}\|>0$

Πράγματι $\left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|=\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)^{1/2}=\left(\frac{(x_1,\dots,x_n)}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{(x_1,\dots,x_n)}{\|\vec{x}\|}\right)^{1/2}=$

$$=\left(\left(\frac{x_1}{\|\vec{x}\|},\dots,\frac{x_n}{\|\vec{x}\|}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{\|\vec{x}\|},\dots,\frac{x_n}{\|\vec{x}\|}\right)\right)^{1/2}=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\|\vec{x}\|}\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\|\vec{x}\|}}_{\frac{1}{\vec{x}\cdot\vec{x}}}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}_{\vec{x}\cdot\vec{x}}\Bigg)^{1/2}=(1)^{1/2}=1$$

Αν φυσικά, το $\vec{x}\cdot\vec{x}=\|\vec{x}\|^2>0$, δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0 \underset{②\quad①}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{=\vec{x}}\neq\underbrace{(0,\dots,0)}_{=\vec{0}}$$

Για το ①: Θ.δ.ο. => δηλ. αρκεί να δείξω ότι αν δεν ισχύει $\vec{x}\neq\vec{0}$, δηλαδή αν ισχύει $\underbrace{\vec{x}=\vec{0}}_{\forall i=1,\dots,n \; x_i=0}$, τότε $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$ (το οποίο τετριμμένο)

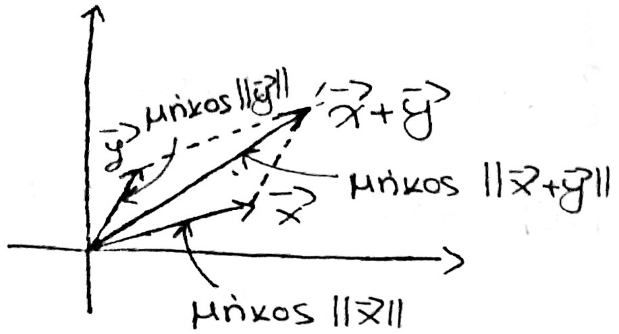
Για το ②: $\vec{x}\neq\vec{0} \Rightarrow \exists\, j=1,\dots,n : x_j = 0 \Rightarrow x_j^2>0$

και $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \underbrace{x_j^2}_{>0} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^2}_{\geq 0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$

e) Νόρμα (= μήκος) διανύσματος: $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}},\ \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$

και ειδικότερα ισχύει: $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ τριγ. ανισότητα.

που σημαίνει γεωμετρικά



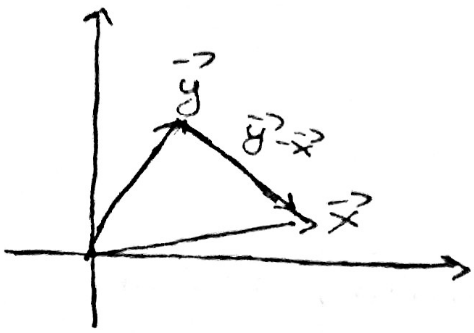
Θεμα 0 [5]: Εκφράστε το $||\vec{x}+\vec{y}||$ με χρήση των $||\vec{x}||$, $||\vec{y}||$ και της γωνίας θ μεταξύ των $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

$$||\vec{x}+\vec{y}|| = \sqrt{(\vec{x}+y)\cdot(\vec{x}+\vec{y})} \Rightarrow ||\vec{x}+\vec{y}||^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) =$$
$$||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} \Rightarrow ||\vec{x}+\vec{y}|| = \cos\theta\cdot||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||$$

Άρα για να ισχύει $||\vec{x}+\vec{y}|| = ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 = ||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| + 2||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||$

δηλαδή $\cos\theta = 1 \xRightarrow{\theta\in[0,\pi]} \boxed{\theta = 0}$

στ) Η απόσταση δύο σημείων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι $\|\vec{x}-\vec{y}\|$

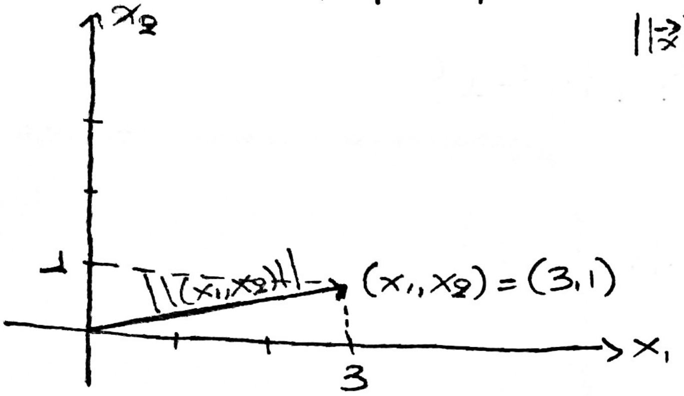


Με τα ⓐ-ⓔ έχουμε τον $\mathbb{R}^n$ ως ευκλείδιο χώρο.

Παρατήρηση 1: Εκτός από την ευκλείδεια νόρμα (ή νόρμα 2) $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ υπάρχουν στον $\mathbb{R}^n$ και άλλες νόρμες όπως η νόρμα 1: $\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ και η νόρμα ∞: $\|\vec{x}\|_\infty := \max\{|x_i| : i=1,\dots,n\}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι πράγματι οι συναρτήσεις $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|_1$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι νόρμες.

Α.Π.3. | 15-10-19 | 4ο μάθημα.



$$\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\| = \|(x_1,\dots,x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

$\|(x_1,x_2)\| = \sqrt{10}$

$\|(x_1,x_2)\|_1 = 4 \left(= |x_1| + |x_2|\right)$

$\|(x_1,x_2)\|_\infty = 3$

Μπορούμε την απόσταση του σημείου $\vec{x}$ από το $\vec{0}$ (είναι διαφορικές μετρικές δηλαδή διαφορετικοί τρόποι να μετρήσουμε κάτι).

<u>Άσκηση</u>: σκεφτείτε αντίστοιχα σημεία σχεδιάστε τα και συγκρίνετε τις νόρμες τους.

<u>Άσκηση</u>: Ποια είναι (γεωμετρικά) τα σύνολα του $\mathbb{R}^2$

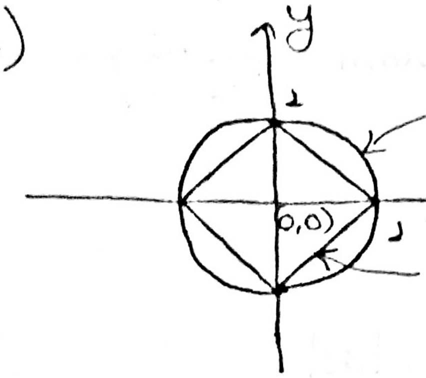
i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\} = S_2$

ii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 = 1\} = S_1$

iii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty = 1\} = S_\infty$

Λύση:

i)



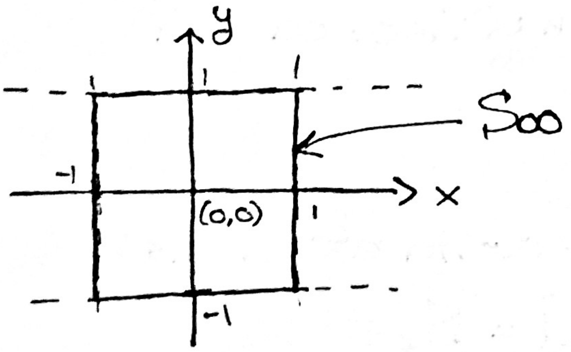
$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$

ii) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{|x| + |y| = 1}\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x+y=1, & \text{αν } x,y \geq 0 \\ -x+y=1, & \text{αν } x \leq 0, y \geq 0 \\ -x-y=1, & \text{αν } x,y \leq 0 \\ x-y=1, & \text{αν } x \geq 0, y \leq 0 \end{array} \right\}$$

iii) $S_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$



Α.Π. 3 | 21-10-19
| 5ο Μάθημα

Είδαμε ότι στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν διάφορες νόρμες (δηλ. συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n$, στο $[0,+\infty)$ με διάφορες συγκεκριμένες ιδιότητες)

Π.χ.: $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ (ευκλείδια νόρμα)

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad (\text{νόρμα } 1)$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i|, i=1,\dots,n\} \quad (\text{νόρμα } \infty)$$

Αυτές επάγουν διαφορετικές μετρικές (δηλ. συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ στο $[0,+\infty)$)

$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (ευκλ. μετρική)

$d_1(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_1$ («μετρική 1»)

$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty$ («μετρική ∞»)

δηλαδή, διαφορετικούς τρόπους να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ του $\mathbb{R}^n$

Αποδεικνύεται ότι στον $\mathbb{R}^n$:
όλες οι μετρικές αυτές (δηλ. αποστάσεις) είναι ισοδύναμες, δηλ. αν μια απόσταση είναι «μεγάλη/μικρή» ως προς την μία μετρική, θα είναι και ως προς την άλλη.

Αυτό ορίζεται στο ότι στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες. <u>Συγκεκριμένα:</u>

<u>Πρόταση:</u> $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: α) $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\|\vec{x}\|_\infty \Longleftrightarrow$

οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες.

β) $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty \Longleftrightarrow$

οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες.

γ) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\|\vec{x}\| \Longleftrightarrow$

οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες.

<u>Απόδειξη:</u> α) $\forall i=1,\dots,n: |x_i| \leq \sum_{J=1}^{n} |x_J| = \underbrace{\|\vec{x}\|_1}_{=\alpha}$

$$\Rightarrow \underbrace{\max\{|x_i|, i=1,\dots,n\}}_{\|\vec{x}\|_\infty} \leq \alpha = \|\vec{x}\|_1$$

και $$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|x_i|}_{\leq \|\vec{x}\|_\infty} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{x}\|_\infty = n\|\vec{x}\|_\infty.$$

β) $$|x_i|^2 \leq \sum_{J=1}^{\infty} |x_J|^2 = \|\vec{x}\|^2 \Rightarrow |x_i| \leq \|\vec{x}\| \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|$$

και

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{x_i^2}_{\leq \|\vec{x}\|_\infty^2} \quad [\forall i=1,\dots,n: |x_i| \leq \underbrace{\max\{|x_J|, J=1,\dots,n\}}_{\|\vec{x}\|_\infty}]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{x}\|_\infty^2 = n\|\vec{x}\|_\infty^2 \Rightarrow \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty$$

μονοτονία ρίζας

Νέα ενότητα: Κάποιες βασικές τοπολογικές έννοιες.

⓪: Ορίζουμε τα (υπο)σύνολα του $\mathbb{R}^n$ ως:

$B(\vec{x},r)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\|<r\}$ ανοιχτή μπάλα κέντρου x ακτ. r.

$\overline{B}(\vec{x},r)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\|\leq r\}$ κλειστή — // —

$\partial B(\vec{x},r)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\|=r\}$ σφαίρα — // —

όπου $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, και $\|\cdot\|$ η ευκλ. νόρμα

Άσκηση: Αν με B_1, B_2, B_∞ συμβολίζουμε την κλειστή μπάλα κέντρου x, ακτίνας r, για τις νόρμες: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|(=\|\cdot\|_2)$, $\|\cdot\|_\infty$ (δηλαδή π.χ. $B_1=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|y-x\|_1\leq r\}$ δείξτε ότι:

$B_1(\vec{x},r)\subset B_\infty(\vec{x},r)$, $B_2(\vec{x},r)\subset B_\infty(\vec{x},r)$

$B_\infty(\vec{x},r)\subset B_1(\vec{x},nr)$, $B_\infty(\vec{x},r)\subset B_2(\vec{x},\sqrt{n}\,r)$

$B_1(\vec{x},r)\subset B_2(\vec{x},\sqrt{n}\,r)$, $B_2(\vec{x},r)\subset B_1(\vec{x},nr)$

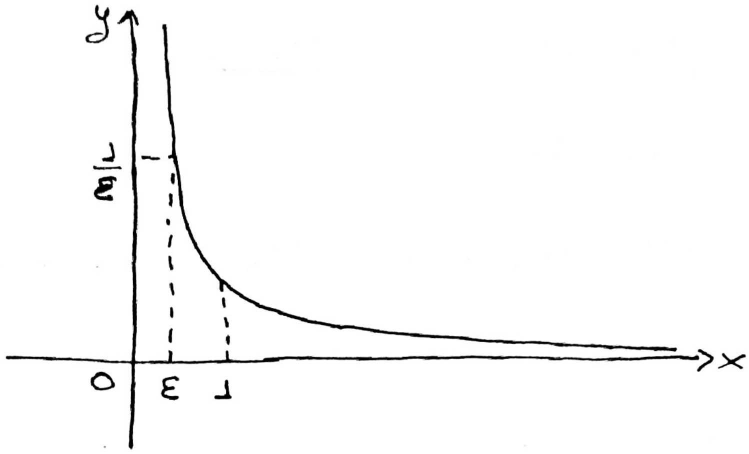
Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε της ισοδυναμίες των $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

① Κίνητρο, Ερώτηση: Έστω η $f(\vec{x})=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1]$

Είναι συνεχής; Είναι φραγμένη;

ΝΑΙ ΟΧΙ

Έστω η $g(x)=\frac{1}{x}$, $x\in[\varepsilon,1]$, με $0<\varepsilon<1$. Είναι συνεχής; Είναι φραγμένη;



Άρα η αλλαγή απο το π.ο. $(0,1]$ στο $[\varepsilon,1]$ $(\varepsilon\in(0,1))$ αλλάζει ~~το~~ σημαντικά την ολική συμπεριφορά της $\frac{1}{x}$.

Ποια η διαφορά μεταξύ του $[0,1]$ και $(0,1]$
(και τα δύο φραγμένα, το πρώτο κλειστό, το δεύτερο όχι κλειστό.)

Παρατηρούμε ότι για την ακολουθία $\underbrace{\frac{1}{\nu}\in(0,1]}\subset[0,1]$

$\frac{1}{\nu}\in(0,1]$, $\forall\nu\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$

ισχύει $\frac{1}{\nu}\xrightarrow{\nu\to\infty}0\begin{cases}\notin(0,1]\\ \in[0,1]\end{cases}$

δηλ. το $[0,1]$ περιέχει το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας μέσα σε αυτό ενώ το $(0,1]$ δεν περιέχει το όριο μιας τουλ. συγκλίνουσας ακολουθίας μέσα σε αυτό.
[Το σύνολο δεν είναι κλειστό]

$\xRightarrow{\text{Άρα}}$ Παίζει ρόλο αν τα άκρα του διαστήματος περιέχουται ή όχι στο διάστημα.

Α.Π. 3 | 22-10-19
6ο Μάθημα

<u>Ορισμός (SUPER-DUPEP-HYPER-SOS)</u>: Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται

ανοιχτό αν $\forall \vec{x} \in U \quad \exists\, \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \subset U$

κλειστό αν το $\mathbb{R}^n \setminus U = U^c$ είναι ανοιχτό

<u>Παρατήρηση</u>: (1) Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται (είναι) και ανοιχτά και κλειστά

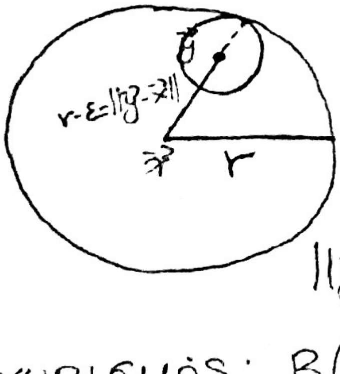
(2) Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά.

(3) Απο το (2) προκύπτει: Αν ένα σύνολο δεν είναι ανοιχτό / κλειστό δεν σημαίνει ότι είναι κλειστό / ανοιχτό.

<u>Παράδειγμα</u>: Η λεγόμενη ανοιχτή μπάλα κέντρου $\vec{x}$ και ακτίνας $r > 0$: $B(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{y} - \vec{x}\| < r\}$ είναι ανοιχτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Πρέπει και αρκεί να δείξω (απο τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου) ότι $\forall \vec{y} \in B(\vec{x}, r) \ \exists\, \varepsilon > 0$:

$$B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \underbrace{B(\vec{x}, r)}_{U}$$



Έστω $\vec{y} \in B(\vec{x}, r) \Leftrightarrow \|\vec{y} - \vec{x}\| < r$

Άρα έχουμε $\|\vec{y} - \vec{x}\| < r$, άρα $\exists\, \varepsilon > 0$:

$\|\vec{y} - \vec{x}\| = r - \varepsilon$

<u>Ισχυρισμός</u>: $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset B(\vec{x}, r)$ δηλ. ο.δ.ο. : $\|\vec{z} - \vec{y}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\vec{z} - \vec{x}\| < r$

Όμως από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε :

$$\|\vec{z}-\vec{x}\| = \|(\vec{z}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{x})\| \leq \underbrace{\|\vec{z}-\vec{y}\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\vec{y}-\vec{x}\|}_{=r-\varepsilon} < \varepsilon + r - \varepsilon = r$$

Δηλαδή $\|\vec{z}-\vec{x}\| < r$

Επίσης η κλειστή μπάλα $\underbrace{\bar{B}(\vec{x},r)}_{=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\|\leq r\}}$, $r>0$, είναι κλειστό σύνολο.

Πρέπει και αρκεί να δείξω ότι το $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\vec{x},r) =$ → είναι ανοιχτό.

$= \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\| \leq r\} = \{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\| > r\}$

Άρα, έστω $\|\vec{y}-\vec{x}\| > r$. Θ.ν.δ.ο. $\exists\, \varepsilon>0 : B(\vec{y},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\vec{x},r)$

→ $\forall\, \vec{z}\in\mathbb{R}^n$, με $\|\vec{z}-\vec{y}\| < \varepsilon$ ισχύει $\|\vec{z}-\vec{x}\| > r$

Θέτω $\|\vec{y}-\vec{x}\| = r+\varepsilon$, $\varepsilon>0$

και χρησιμοποιώ την ανάστροφη τριγωνική ανισότητα :

$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (Άσκηση)

Α.Π.3 | 29-10-19
7ο Μάθημα

Υπενθύμιση: - $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in U : \exists \underset{\varepsilon(x)}{\overset{}{\varepsilon}} > 0 \quad B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U$

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus U$ ανοιχτό.

Παρατήρηση: α) Τα $\emptyset, \mathbb{R}^n$ είναι και ανοιχτά και κλειστά και είναι τα μόνα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με αυτή την ιδιότητα.

β) Δεν είναι όλα τα σύνολα είτε ανοιχτά είτε κλειστά.

π.χ.: Το σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<0, y\geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό, αφού αφενώς το $(-1,0) \in U$ κάθε δίσκος $B((-1,0), \varepsilon)$ με $\varepsilon > 0$ έχει σημεία εκτός του U ($\Leftrightarrow B((-1,0), \varepsilon) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus U)}_{=U^c} \neq \emptyset$)

[Ας πούμε, το σημείο $(-1, -\varepsilon/2) \notin U$]

Άρα U όχι ανοιχτό. Μήπως είναι κλειστό; Θα πρέπει τότε το $\mathbb{R}^n \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<0, y<0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$ να είναι ανοιχτό, το οποίο (ανάλογα με πριν) δεν είναι ανοιχτό, αφού π.χ. για το $(1,0) \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν μπορώ να βρώ κανένα $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα $B((1,0), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U$, αφού π.χ. έχουμε $\underbrace{(1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \in B((1,0), \varepsilon)}$, αλλά $(1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \notin \mathbb{R}^n \setminus U$.

$\Leftrightarrow \|(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) - (1,0)\| = \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

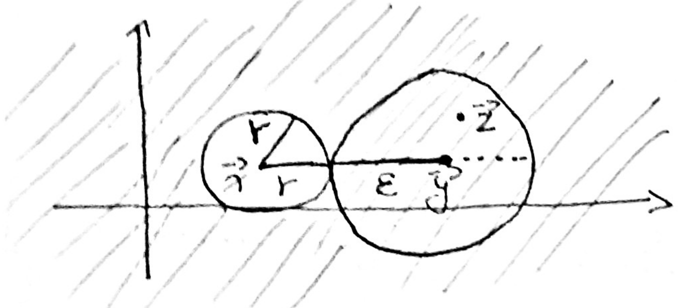
Πρόταση (1.3.1):

α) Κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο (Αποδ. προηγ. μάθημα)

β) Κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: β) Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Τότε Θ.ν.δ.ο. το $\vec{B}(\vec{x}, \varepsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{y}| \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό, δηλαδή ότι το

$\mathbb{R}^n \setminus \vec{B}(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{y} - \vec{x}\| > r\}$ είναι ανοιχτό.



Αφού για τυχαίο $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \vec{B}(\vec{x}, r)$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(\vec{y}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \vec{B}(\vec{x}, r)$

$\|\vec{y} - \vec{x}\| = r + \varepsilon$, υποπτευόμαστε (ισχυριζόμαστε) ότι

δηλαδή ότι $\forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{z} - \vec{y}\| < \varepsilon : \|\vec{z} - \vec{x}\| > r$

Αυτό, όμως, ισχύει αφού (τριγωνική ανισότητα)

$$\|\vec{z} - \vec{x}\| \geq \underbrace{\|\vec{y} - \vec{x}\|}_{= r + \varepsilon} - \underbrace{\underbrace{\|\vec{z} - \vec{y}\|}_{< \varepsilon}}_{> -\varepsilon} > r + \varepsilon - \varepsilon = r$$

$$\underbrace{\|\vec{y} - \vec{x}\|}_{\|\vec{y} - \vec{z} + \vec{z} - \vec{x}\|} \leq \|\vec{z} - \vec{x}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\|$$

Πρόταση (1.3.2): Η ένωση μιας (οσοδήποτε μεγάλης) οικογένειας ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο και η τομή ενος πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό.

Απόδειξη: Έστω I μια οικογένεια δεικτών και U_i ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^n$.

Θ.ν.δ.ο. $\bigcup_{i\in I} U_i$ ανοιχτό.

Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : \vec{x} \in U_{i_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x},\varepsilon) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

Έστω τώρα U_i, $i=1,\dots,k$ $(k\in\mathbb{N})$ ανοιχτά $\subseteq \mathbb{R}^n$

Θ.ν.δ.ο. $\bigcap_{i=1}^{k} U_i = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ είναι ανοιχτό

① $\bigcap_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$, ανοιχτό εξ' ορισμού

② $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$

Τότε $\vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i \Rightarrow \forall i=1,\dots,k : \vec{x} \in U_i \xRightarrow{U_i:\text{ανοιχτά}} \exists \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k > 0 : B(\vec{x},\varepsilon_i) \subseteq U_i$

Έστω $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\} > 0$, με $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, $\forall i=1,\dots,k$

Τότε $B(\vec{x},\varepsilon) \subseteq B(\vec{x},\varepsilon_i)$ $\forall i=1,\dots,k \Rightarrow B(\vec{x},\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_i$

Ερώτηση: Γιατί είναι λάθος να πάρουμε τομή από μη-πεπερασμένο πλήθος ανοιχτών, όταν θέλουμε η τομή τους να είναι ανοιχτή;

Απάντηση: • Αν η τομή είναι κενή, κανένα πρόβλημα
• Αν η τομή είναι μη κενή και έχει π.χ. μόνο ένα στοιχείο, δηλαδή $\bigcap U_i = \{\vec{x}\}$, τότε αυτή δεν είναι ανοιχτή (*)

(*) Για να είναι ανοιχτή, θα πρέπει $\forall \vec{y} \in \{\vec{x}\}, \exists \varepsilon > 0$: $B(\vec{y}, \varepsilon) \subseteq \{\vec{x}\}$ δηλαδή θα πρέπει $\exists \varepsilon > 0$: $\underbrace{B(\vec{x}, \varepsilon)}_{=\{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{z} - \vec{x}\| < \varepsilon\}} \subseteq \{\vec{x}\}$

π.χ. $\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{z} - \vec{x}\| = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \vec{z} \neq \vec{x}$ [αφού αν $\vec{z} = \vec{x}$ τότε $\|\vec{z} - \vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{x}\| = 0 \neq \frac{\varepsilon}{2}$]

δηλαδή βρίκαμε $\vec{z} \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ με $\vec{z} \notin \{\vec{x}\}$

Μια τέτοια (άπειρα αριθμήσιμη) τομή προκύπτει για οποιοδήποτε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, αν θεωρήσουμε τα σύνολα $U_i = B(\vec{x}, 1/i)$, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ είναι ανοιχτά και $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{\vec{x}\}$.

Άσκηση: Ν.δ.ο. $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{\vec{x}\}$

Πρόταση (1.3.3) (Άσκηση): Η τομή μιας (οσοδήποτε μεγάλης) οικογένειας κλειστών είναι κλειστό και η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών είναι κλειστό.

Ερώτηση: Βρείτε μια ακολουθία απο κλειστά σύνολα, που η ένωσή τους δεν ειναι κλειστό σύνολο (Άσκηση).

Α.Π. 3 | 1-11-19
8ο Μάθημα

Υπενθύμιση:

Ορισμός: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται:

α) Εσωτ. σημείο του $U \iff \exists \varepsilon > 0$, $B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U$

β) Εξωτ. σημείο του $U \iff \vec{x}$ εσωτερικό του $\mathbb{R}^n \setminus U = U^c$

γ) Συνοριακό σημείο του $U \iff$ το $\vec{x}$ δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό.

Συμπλήρωση: $\text{int}\,U$ = το σύνολο των εσωτερικών σημείων του U.

$\text{ext}\,U$ = — // — εξωτερικών — // —

$\text{bd}\,U$ = — // — συνοριακών — // —

Παράδειγμα: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$

Ποια είναι τα $\text{int}\,U$, $\text{ext}\,U$, $\text{bd}\,U$;

Λύση: 1) $\text{int}\,U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, αφού αν $y > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ τότε $B((x,y), y) \subseteq U$

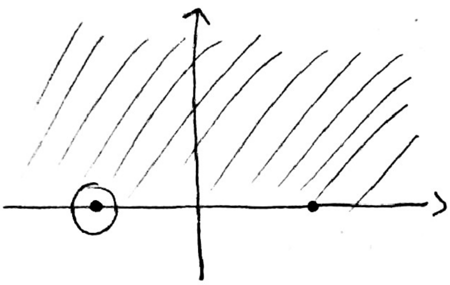
2) $\text{ext}\,U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, αφού αν έχω $y_0 < 0$ και $x \in \mathbb{R}$ οτιδήποτε, τότε το $B((x_0,y_0), -y_0)$ βρίσκεται ολόκληρο έξω από U.

Έστω ότι έχω $(x_1,y_1)\in B((x_0,y_0),-y_0) \iff \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}<|y_0|$

Θ.ν.δ.ο. $y_1<0$

Έχουμε σίγουρα $|y_1-y_0|<|y_0| \iff$

$$-|y_0|<y_1-y_0<|y_0| \iff$$



$$y_0-|y_0|<y_1<y_0+|y_0| = y_0+(-y_0)=0 \iff$$

$$y_0-|y_0|<y_1<0$$

3) Επίσης $\forall x_0\geq 0$, $y_0=0$, βλέπω ότι $B((x_0,y_0),\varepsilon)\not\subseteq U$, $\not\subseteq \mathbb{R}^n\setminus U$

Συνεπώς $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}\subseteq bdU$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} intU &= \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ extU &= \mathbb{R}\times(-\infty,0) \\ bdU &= \mathbb{R}\times\{0\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow intU\cup extU\cup bdU=\mathbb{R}^n$$

<u>Άσκηση</u>: Το εσωτερικό, το εξωτερικό και το συνοριακό σημείο της ανοιχτής και της κλειστής μπάλας ταυτίζονται (λεπτ. → παραδ. 1.3.4)

<u>Πρόταση (1.3.4.)</u>: Έστω $U\in\mathbb{R}^n$, τότε:

α) $intU\subseteq U$

β) $intU$ ανοιχτό

γ) U ανοιχτό $\iff intU=U$

δ) $U\subseteq V\subseteq\mathbb{R}^n \Rightarrow intU\subseteq intV$

ε) $extU \underset{\text{ορισμός}}{=} int(\mathbb{R}^n\setminus U)\subseteq(\mathbb{R}^n\setminus U)$

Παρατήρηση: Το εξωτερικό ενός U δεν είναι απαραίτητα το συμπλήρωμα του U. $[ext U \neq \mathbb{R}^n \setminus U]$

Απόδειξη πρότασης 1.3.4:

α) $\vec{x} \in int U \xRightarrow{\text{ορισμός}} \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B(\vec{x}, \varepsilon)}_{\in \vec{x}} \subseteq U$

β) Έστω $\vec{x} \in int U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U$

όμως ξέρω ότι κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο.

$\Rightarrow \forall \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon) \ \exists \varepsilon(\vec{y}) > 0 : B(\vec{y}, \varepsilon(\vec{y})) \subseteq B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U$

$\Rightarrow$ κάθε $\vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ είναι εσωτερικό σημείο του $U \Rightarrow$

$B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq int U$

γ) "$\Longrightarrow$" Προκύπτει από το α) και τους ορισμούς του εσωτερικού σημείου και του ανοιχτού συνόλου. (κάθε σημείο ενός ανοιχτού συνόλου, είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου).

"$\Longleftarrow$" Από το β)

δ) Από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου.

ε) Προκύπτει από τους ορισμούς εξωτερικού και εσωτερικού σημείου (ή ισοδύναμα) και το α)

Έστω ένα $U \in \mathbb{R}^n$. Ποιο είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U; [π.χ. Ποιο είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει την ανοιχτή μπάλα $B(\vec{x}, r)$;]

<u>Ορισμός:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U ονομάζεται κλειστή θήκη του U και συμβολίζεται με $\bar{U}$, δηλαδή

$$\bar{U} = \bigcap_{K \in \mathbb{K}}, \text{ όπου } \mathbb{K} = \{K \subseteq \mathbb{R}^n : K \text{ κλειστό}, K \supseteq U\}$$

<u>Πρόταση</u> (1.3.5): Έστω $U \in \mathbb{R}^n$, τότε:

α) $U \subseteq \bar{U}$

β) $\bar{U}$ κλειστό σύνολο

γ) $U \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$, K κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subseteq K$

δ) U κλειστό $\Rightarrow U = \bar{U}$

<u>Απόδειξη:</u> α) Έστω το $\vec{x} \in U$ και $\mathbb{K}$ όπως στον ορισμό

$\Rightarrow \vec{x} \in U \subseteq \mathbb{K}$, $\forall K \in \mathbb{K} \Rightarrow \vec{x} \in \bigcap_{K \in \mathbb{K}} K = \bar{U}$

β) $\bar{U} = \bigcap$ κλειστών συνόλων (παλαιότερη πρόταση)

γ) Αφού $K \in \mathbb{K}$ τότε $\underbrace{\bigcap_{L \in \mathbb{K}} L}_{=\bar{U}} \subseteq K$ (κάποιο από τα $L \in \mathbb{K}$ είναι το K)

δ) "$\Rightarrow$" Αφού U κλειστό και $U \subseteq U$ τότε από το γ) έχουμε: $\bar{U} \subseteq U$. Επίσης από το α) έχουμε $U \subseteq \bar{U}$

"$\Leftarrow$" Από το β)

<u>Παρατήρηση:</u> Τα (α), (β), (γ) μας λένε ότι το $\bar{U}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U.

Α.Π. 3 | 4-11-19.
9ο Μάθημα

Τελευταίο μάθημα: Κλειστή Θήκη του $U \subseteq \mathbb{R}^n$: $\Leftrightarrow$

$$\bar{U} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \ , \quad \mathcal{K} = \{ K \in \mathcal{K} ,\ K \text{ κλειστό} ,\ K \supset U \}$$

Είδαμε Πρόταση 1.3.5: $U \subseteq \bar{U}$, $\bar{U}$ κλειστό, $U \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$, K κλειστό
$\Rightarrow \bar{U} \subseteq K$

$\Leftrightarrow$ Η κλειστή θήκη $\bar{U}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U.

Επίσης U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$

ΝΕΟ ! | Ορισμός : Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται:

α) Μεμονωμένο σημείο του U. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U \cap B(\vec{x}, \varepsilon) = \{\vec{x}\}$

β) Σημείο συσσώρευσης του U. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \neq \emptyset$

γ) Σημείο επαφής του U. $\Leftrightarrow$ Αν $\vec{x} \in U$ ή $\vec{x}$ σημείο συσσ. του U. Το σύνολο των σημείων επαφής $= U \cup U'$

* Σύνολο σημείων συσσ. του U ονομάζεται παράγωγο σύνολο

Παρατήρηση: α) Αν $\vec{x}$ μεμ. σημείο του $U \Rightarrow \vec{x} \in U$ ή ∂U

β) Αν $\vec{x} \in U \Rightarrow \vec{x}$ ή μεμ. σημείο του U ή σημείο συσσώρευσης του U.

γ) $\text{int} U \subseteq U'$ [$\Leftrightarrow$ κάθε εσωτερικό σημείο ενός U είναι σημείο συσσ. του U].

[$\exists \varepsilon_0 > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon_0) \subset U$

Έστω $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ τότε $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset B(\vec{x}, \varepsilon_0) \subset U$

$\Rightarrow \underset{\neq \emptyset}{B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\}} \subset U \Rightarrow B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \cap U \neq \emptyset$

Αν $\varepsilon > \varepsilon_0$ τότε $\exists\, \varepsilon' \leq \varepsilon_0$ με $\underbrace{B(\vec{x},\varepsilon')\setminus\{\vec{x}\}}_{\subseteq B(\vec{x},\varepsilon)\setminus\{\vec{x}\}} \cap U \neq \emptyset$

δ) $\text{ext}U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U'$ [$\Leftrightarrow$ ενα εξωτερικό σημειο δεν μπορεί να είναι σ.σ. του U].

$\text{ext}U \neq U^c$

Αφού $\text{ext}U \underset{\text{op.}}{=\!=} \text{int}(\mathbb{R}^n\setminus U) \subseteq \mathbb{R}^n\setminus U'$:

$\vec{x} \in \text{ext}U \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : B(\vec{x},\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω. $\underbrace{B(\vec{x},\varepsilon)}_{\supset B(\vec{x},\varepsilon)\setminus\{\vec{x}\}} \cap U = \emptyset \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : B(\vec{x},\varepsilon)\setminus\{\vec{x}\}\cap U = \emptyset$

<u>Άσκηση:</u> Δείξτε τα α, β και εξετάστε αν ισχύει το αντίστροφο.
[Αν δεν ισχύει δώστε αντιπαράδειγμα]

<u>Πρόταση 1.3.6:</u> Έστω $U \in \mathbb{R}^n$. Τότε η κλειστή θήκη $\bar{U} = U \cup U'$

<u>Πόρισμα 1.3.1:</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow U' \subset U$ [Άσκηση 67 σημ.]

<u>Πρόταση 1.3.7:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $\bar{U} = \text{int}U \cap \text{bd}U$ $\boxed{\text{SOS}}$

<u>Παρατήρηση:</u> Αφού $\text{int}B(\vec{x},\varepsilon) = B(\vec{x},\varepsilon)$ και $\text{bd}B(\vec{x},\varepsilon) = \underbrace{\partial B(\vec{x},\varepsilon)}_{1}$, από την πρόταση 1.3.7 έχουμε $B(\vec{x},\varepsilon) = \underbrace{\bar{B}(\vec{x},\varepsilon)}_{2} :=$ $\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\| < \varepsilon\}$

$1 := \{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{y}-\vec{x}\| = \varepsilon\}$

$2 := \{\vec{y}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \varepsilon\}$

Συμβολισμός: Χρησιμοποιείται συχνά και ο συμβολισμός:

$\operatorname{int} U = \mathring{U}$ και $\operatorname{bd} U = \partial U$

Απόδειξη Πρ. 1.3.6: "$\Rightarrow$" Αφού γνωρίζουμε ότι $U \subseteq \bar{U}$, πρέπει και αρκεί ν.δ.ο. $U' \subseteq \bar{U}$ ή ισοδύναμα, ότι $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$. Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$. Αφού $\bar{U}$ κλειστό, $\exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow$

$B(\vec{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \cap U = \emptyset$, που σημαίνει ότι το $\vec{x}$ δεν είναι σημείο συσσ.

"$\Leftarrow$" Πρέπει και αρκεί ν.δ.ο. $\mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} =$

$= (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')$

Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν είναι σημείο συσσ.

Τότε $\exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \cap U = \emptyset \xrightarrow{x \notin U}$

$B(\vec{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Longrightarrow U \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus B(\vec{x}, \varepsilon)}_{\text{κλειστό}} \Rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(\vec{x}, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Απόδ. Πρότασης 1.3.7: Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^n = \operatorname{ext} U \cup \operatorname{int} U \cup \operatorname{bd} U$.

Άρα πρέπει και αρκεί να δείξουμε $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \operatorname{ext} U$.

Αφού $\bar{U}$ κλειστό και $U \subseteq \bar{U}$ έχουμε $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}) \subseteq \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \underset{\text{ορ.}}{=} \operatorname{ext} U$.

Από την άλλη, $\forall \vec{x} \in \operatorname{ext} U : \exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U \Longrightarrow$

$\vec{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U') = \mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') = \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow$

$\operatorname{ext} U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ [$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U'$, επειδή, $\operatorname{ext} U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U'$]

Α.Π. 3 | 5-11-19

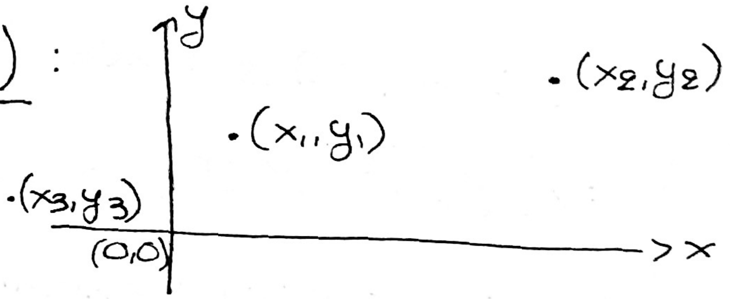
10ο μάθημα

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$:

Ορισμός: Μια απεικόνιση $\underset{\in\mathbb{N}}{\nu} \longmapsto \vec{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$, ονομάζεται ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, και (ολόκληρη την ακολουθία όχι τους όρους της $\vec{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$) τη συμβολίζουμε με $(\vec{x}_\nu)$. [η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$] και για να είναι σαφές ότι πρόκειται για ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ γράφουμε $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ [θεωρώντας το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(\vec{x}_\nu)$ το οποίο είναι: $\{\vec{x}_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$].

[ο δείκτης $\nu \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιείται επειδή με n συμβολίσαμε τη διάσταση του πεδίου τιμών $\mathbb{R}^n$].

Γεωμετρικά (π.χ. στον $\mathbb{R}^2$):



Ο κάθε όρος $\vec{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ έχει n συντεταγμένες, τις οποίες τις συμβολίζουμε με $x_\nu^{(i)}$, $i=1,\dots,n$, δηλαδή μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ καθορίζεται σαφώς από τους όρους της

$$\vec{x}_\nu = (\underbrace{x_\nu^{(0)}}_{\in\mathbb{R}}, \dots, \underbrace{x_\nu^{(n)}}_{\in\mathbb{R}})$$

[Εάν η ακολουθία είναι στον $\mathbb{R}^2$ γράφουμε και $(\underbrace{x_\nu}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y_\nu}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^3$ $(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \in \mathbb{R}^3$ $\nu \in \mathbb{N}$.

Τι καταλαβαίνουμε όταν λέμε ότι οι όροι μιας ακολουθίας $\vec{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$ «πλησιάζουν» ένα σημείο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, όταν το $\nu \to \infty$;

<u>Ορισμός</u>: Μια ακολουθία $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο σημείο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, όταν $\nu \to \infty$, αν (και μόνον αν),

$$\underbrace{\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}} \to 0, \text{ για } \nu \to \infty.$$

Γράφουμε $\vec{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \vec{x}_0$ ή απλούστερα, ως αυτονόητο, $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$

και το $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται όριο της ακολουθίας $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Αν υπάρχει ένα όριο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$, λέμε ότι η ακολουθία (x_ν) συγκλίνει.

<u>Παράδειγμα</u>: Οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\nu^2}\right)$, $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$, $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^3}\right)$, $\left(\sin\frac{1}{\sqrt{\nu}}, e^{-\nu}\right)$ συγκλίνουν όλες στο $(0,0)$ του $\mathbb{R}^2$

αφού για όλες ισχύει $\|(x_\nu, y_\nu) - (0,0)\| = \|(x_\nu, y_\nu)\|$

$$= \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0 \iff x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0$$

Super SOS Ιδέα

Το ότι ισχύει ο πιο πάνω ισχυρισμός προκύπτει από το ότι

$\underbrace{x_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to 0$ και $\underbrace{y_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 \to 0$ και $y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow$

$x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \xrightarrow[\text{ισοσυγκλινουσών}]{\text{Θεώρημα}} 0 \le x_\nu^2 \le x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 \to 0$

(αντίστοιχα $y_\nu^2 \to 0$) $\Longrightarrow |x_\nu|^2 \to 0$ και $|y_\nu|^2 \to 0$

$\Longrightarrow |x_\nu| \to 0$ και $|y_\nu| \to 0 \Rightarrow$ Με άλλα λόγια, μόλις δείξαμε στον $\mathbb{R}^n$ ότι $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$

(αν $a_\nu \ge 0$, $a_\nu \to a (\ge 0)$ τότε $\sqrt{a_\nu} \to \sqrt{a}$)

$\stackrel{!!!}{\Longrightarrow} x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$

<<Ηθικό>> δίδαγμα: Στον $\mathbb{R}^2$ (και γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$) μια ακολουθία $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$ μπορεί να συγκλίνει στο όριο $\vec{x}_0$ με πολλούς περισσότερους τρόπους (<<δρόμους>>) απο ότι στον $\mathbb{R}$, όπου η $\underbrace{a_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}$, κινούμενη πάνω στον $\mathbb{R}$.

Απο τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$, $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$, σε ένα όριο $\vec{x}_0$ στο $\mathbb{R}^n$, $\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| \to 0$ προκύπτουν άμεσα οι εξής ισοδυναμίες:

$\overset{\text{ορ.}}{\iff} \vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$. Επίσης $\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| \to \vec{0} \iff \|(x_\nu, y_\nu) - \vec{0}\| \to \vec{0}$

$\iff \vec{x}_\nu - \vec{x}_0 \to \vec{0}$

Ακόμα $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0 : \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \varepsilon$

Απο αυτό προκύπτουν, άμεσα, τα εξής δύο αποτελέσματα:

<u>Πρόταση (1.4.1)</u>: Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim_{\nu \to \infty} \vec{x}_\nu = \vec{x}_0 \iff \vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$.

<u>Απόδειξη:</u> [Άσκηση] Σημειώσεις, όπως στον $\mathbb{R}$.

Πρόταση (1.4.2): Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη. [$\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \forall \nu \geq \nu_0$:

$\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < 1 \Rightarrow \big|\|\vec{x}_\nu\| - \|\vec{x}_0\|\big| < 1 \Rightarrow$

$\|\vec{x}_\nu\| \leq \|\vec{x}_0\| + 1 \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \|\vec{x}_\nu\| \leq$

$\leq \max\{\|\vec{x}_1\|, \ldots, \|\vec{x}_{\nu_0 - 1}\|, \|\vec{x}_0\| + 1\}$]

Πρόταση (1.4.3): $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$, $\vec{y}_\nu \to \vec{y}_0$ στον $\mathbb{R}^n$

$a_\nu \to a$, $b_\nu \to b$ στον $\mathbb{R}$

$\Rightarrow a_\nu \vec{x}_\nu + b_\nu \vec{y}_\nu \to a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0$ [Απόδειξη: Άσκηση με λύση εδώ]

Θ.ν.δ.ο.: $0 \leq \|a_\nu \vec{x}_\nu + b_\nu \vec{y}_\nu - (a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0)\| \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

Γενική ιδέα (αν δουλεύει), Θεώρημα ισοσυγκλινουσών στον $\mathbb{R}$ (παρεμβολής)

$$\|a_\nu \vec{x}_\nu + b_\nu \vec{y}_\nu - (a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0)\| =$$

$$= \|a_\nu(\vec{x}_\nu - \vec{x}_0) + (a_\nu - a)\vec{x}_0 + b_\nu(\vec{y}_\nu - \vec{y}_0) + (b_\nu - b)\vec{y}_0\| \underset{\text{ανισ.}}{\overset{\text{τριγ.}}{\leq}}$$

$$\|a_\nu(\vec{x}_\nu - \vec{x}_0)\| + \|(a_\nu - a)\cdot\vec{x}_0\| + \|b_\nu(\vec{y}_\nu - \vec{y}_0)\| + \|(b_\nu - b)\cdot\vec{y}_0\|$$

$$\underbrace{\underbrace{|a_\nu|}_{\substack{\leq C \\ \text{συγκλίνουσα}}}\cdot\underbrace{\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\|}_{\to 0}}_{\substack{\text{μηδενική} \times \text{φραγμένη} \\ \to 0.}} \qquad \underbrace{\underbrace{|a_\nu - a|}_{\to 0}\cdot\|\vec{x}_0\|}_{\to 0} \qquad \underbrace{\underbrace{|b_\nu|}_{\substack{\leq C_1 \\ \text{ως συκλίνουσα}}}\cdot\underbrace{\|\vec{y}_\nu - \vec{y}_0\|}_{\to 0}}_{\substack{\text{μηδενική} \times \text{φραγμένη} \\ \to 0}} \qquad \underbrace{\underbrace{|b_\nu - b|}_{\to 0}\cdot\|\vec{y}_0\|}_{\to 0}$$

Επίσης όπως είδαμε στον $\mathbb{R}^2$ ήδη, ισχύει γενικά η εξής

Πρόταση (1.4.4.): Έστω $\vec{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $\vec{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, τότε: $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \iff \forall i = 1, \dots, n \; x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

Απόδειξη: Ισχύει (ισοδυναμία νορμών) $^{(*)}$ $\|\vec{x}\|_\infty := \max\{|x^{(1)}|, \dots, |x^{(n)}|\} \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\|\vec{x}\|_\infty \;\; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$

"$\Rightarrow$" Από την (*) έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N} : 0 \leq |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\|_\infty \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\|$

$\forall i = 1, \ldots, n$

$\xRightarrow[\text{παρεμ.}]{\text{Θεώρ.}} \forall i = 1, \ldots, n \quad |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \to 0 \Leftrightarrow x_\nu^{(i)} \xrightarrow{\nu \to \infty} x_0^{(i)}$

"$\Leftarrow$" Έχουμε $\forall i = 1, \ldots, n \quad x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ και $\forall i = 1, \ldots, n \ \exists \nu_i \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_i \ |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 = \max\{\nu_1, \ldots, \nu_n\} \in \mathbb{N}, \forall \nu \geq \nu_0$

$|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0 \ \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\xRightarrow[(*)]{} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0 \ \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \varepsilon$

Α.Π.3 | 8-11-19

11ο Μάθημα

$(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \iff \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$

<u>Ορισμός /Θεώρημα:</u> Μια ακολουθία $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ συγκλίνει $\iff$ $(\vec{x}_\nu)$: ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία), δηλαδή $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$ $\nu, \mu > \nu_0 : \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_\mu\| < \varepsilon$

<u>Απόδειξη:</u> "$\Longrightarrow$" Έστω $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\forall \nu \geq \nu_0 : \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \forall \nu, \mu \geq \nu_0$:

$\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_\mu\| \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0 - \vec{x}_\mu\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

"$\Longleftarrow$" ν.δ.ο. $\exists \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$

Έστω $\vec{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$. Αφού η $(\vec{x}_\nu)$: ακολουθία Cauchy $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \forall \nu, \mu \geq \nu_0$:

$|x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}| \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_\mu\|_\infty \leq \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_\mu\| < \varepsilon$

$\forall i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n$ $(x_\nu^{(i)}) \subseteq \mathbb{R}$: ακολουθία Cauchy.

$\xRightarrow{\mathbb{R}:\text{πλήρης}} \forall i = 1, \ldots, n, \exists x_0^{(i)} \in \mathbb{R} : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$ (στο $\mathbb{R}$)

Θέτουμε $\vec{x}_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ και άρα (Προτ. 1.4.4):

$\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \overset{\text{Προτ. 1.4.4}}{\iff}$

$x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$ (στο $\mathbb{R}$) $\forall i = 1, \ldots, n$.

<u>Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass)</u>: Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια [τουλ. μια] συγκλίνουσα υπακολουθία.

[Αν $(\vec{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ και $k:\nu\mapsto k_\nu\in\mathbb{N}$ με $k_\nu<k_{\nu+1}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$ τότε $(\vec{x}_{k_\nu})\subseteq(\vec{x}_\nu)$ είναι υπακολουθία της $(\vec{x}_\nu)$].

<u>Απόδειξη</u>: Χρησιμοποιούμε ως γνωστό το Θ. Bolzano-W στον $\mathbb{R}$.

<u>Ιδέα</u>:

	$i=1$	2	3	4	$\dots$	n	
$\nu=1$	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_1^{(4)}$	$\dots$	$x_1^{(n)}$	$\vec{x}_1$
$\nu=2$	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$x_2^{(3)}$	$x_2^{(4)}$	$\dots$	$x_2^{(n)}$	$\vec{x}_2$
$\nu=3$	$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$	$x_3^{(3)}$	$x_3^{(4)}$	$\dots$	$x_3^{(n)}$	$\vec{x}_3$
$\nu=4$	$x_4^{(1)}$	$x_4^{(2)}$	$x_4^{(3)}$	$x_4^{(4)}$	$\dots$	$x_4^{(n)}$	$\vec{x}_4$

① Θεωρώ μόνο την ακολουθία $(x_\nu^{(1)})\subseteq\mathbb{R}$

Είναι φραγμένη: $|x_\nu^{(1)}|\leq\|\vec{x}_\nu\|\leq C$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\xrightarrow[\text{στον }\mathbb{R}]{B-W}\ \exists\ \underbrace{(x_{k_\nu}^{(1)})}_{\text{συγκλίνει}}\subseteq(x_\nu^{(1)})$$

② Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $(x_{k_\nu}^{(2)})\subseteq(x_\nu^{(2)})\subseteq\mathbb{R}$.

Αφού η $(x_\nu^{(2)})$ είναι φραγμένη και η $(x_{k_\nu}^{(2)})$ είναι φραγμένη $\xrightarrow[\text{στον }\mathbb{R}]{B-W}$ $\exists(x_{k_{\ell_\nu}}^{(2)})\subseteq(x_{k_\nu}^{(2)})$ με

$$(x_{k_{\ell_\nu}}^{(2)})\xrightarrow{\nu\to\infty}x_0^{(2)}\in\mathbb{R}$$

Όμως επειδή $(x_{k_{\ell_\nu}}^{(1)})\subseteq(x_{k_\nu}^{(1)})$ συγκλίνει στο $x_0^{(1)}$ και η $(x_{k_{\ell_\nu}}^{(1)})\xrightarrow{\nu\to\infty}x_0^{(1)}\in\mathbb{R}$. Άρα μέχρι τώρα βρήκαμε μια υπακολουθία δεικτών: $(k_{\ell_\nu})\subseteq(k_\nu)\subset(\nu)$

Έτσι ώστε $(x_{k_{\varepsilon_\nu}}^{(1)}) \to x_0^{(1)}$ και $(x_{k_{\varepsilon_\nu}}^{(2)}) \to x_0^{(2)}$

③ Συνεχίζοντας, βρίσκουμε τελικά μια υπακολουθία δεικτών $(m_\nu) \subseteq (\nu)$ με $(x_{m_\nu}^{(i)}) \to x_0^{(i)}$, $\forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow (\vec{x}_{m_\nu}) \to \vec{x}_0$ στον $\mathbb{R}^n$

<u>Παρατήρηση:</u> Τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών μιας ακολουθίας $(\vec{x}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζονται σ.σ. της ακολουθίας.

• Οι ακολουθίες είναι σημαντικές για να καταλάβουμε διάφορες τοπολογικές έννοιες (σε μετρικούς χώρους). Ας δούμε κάποιες ιδιότητες:

<u>Πρόταση 1.4.5:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\vec{x}$: σ.σ. του U $[\Leftrightarrow \vec{x} \in U']$ $(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \cap U \neq \emptyset) \Leftrightarrow$

$\exists\, (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\}: \vec{x}_\nu \to \vec{x}$.

<u>Απόδειξη:</u> "$\Rightarrow$" Έστω $\vec{x}$ σ.σ. του U, όπως στον ορισμό.

Θ.ν.δ.ο $\exists\, (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\}: \vec{x}_\nu \to \vec{x}$

Έχουμε από τον ορισμό: $\forall \nu \in \mathbb{N}: \underbrace{B(\vec{x}, \tfrac{1}{\nu}) \setminus \{\vec{x}\}}_{y \in\ \Leftrightarrow\ 0 \le \|\vec{y} - \vec{x}\| < \frac{1}{\nu}} \cap U \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists\, \vec{x}_\nu \in U: \underbrace{0 < \|\vec{x} - \vec{x}_\nu\|}_{\Leftrightarrow\ \vec{x}_\nu \neq \vec{x}} < \frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}: \exists\, \vec{x}_\nu \in U \setminus \{\vec{x}\}: 0 \le \|\vec{x} - \vec{x}_\nu\| < \left(\frac{1}{\nu}\right) \to 0 \xrightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}}$

$\Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x}_\nu\| \to 0 \xLeftrightarrow{\text{ορισμός}} \vec{x}_\nu \to \vec{x}$

"$\Longleftarrow$" Έστω $(\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\}$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \|\vec{x}_{\nu_0} - \vec{x}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \boxed{\vec{x}_{\nu_0} \in B(\vec{x}, \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \vec{x}_{\nu_0} \in B(\vec{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\vec{x}\} \neq \emptyset.$$

<u>Άσκηση</u>: <u>Πρόταση (1.4.6.)</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$\vec{x} \in \bar{U} \Leftrightarrow \exists (\vec{x}_\nu) \subseteq U : \vec{x}_\nu \to \vec{x}$$

$\underbrace{\text{Πρόταση (1.4.7.)}}_{\text{SUPER SOS.}}$: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\vec{x} \in U$.

Α.Π.3 ; 11-11-19
; 11º Μάθημα

<u>Πρόταση (1.4.5)</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\vec{x} \in U' \Leftrightarrow \exists (\vec{x_\nu}) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\}$: $\vec{x_\nu} \to \vec{x} \Leftrightarrow$ $\vec{x}$ σημείο συσσώρευσης του U.

<u>Πρόταση (1.4.6)</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\vec{x} \in \overline{U} \Leftrightarrow \exists (\vec{x_\nu}) \subseteq U : \vec{x_\nu} \to \vec{x}$

<u>Πρόταση (1.4.7.)</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\vec{x_n}) \subseteq U$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} \in U$.

SOS

<u>Πρόταση (1.4.8.)</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές (= κλειστό και φραγμένο)

$\Leftrightarrow \forall (\vec{x_n}) \subseteq U$ $\exists (\vec{x_{k_\nu}}) \subseteq (\vec{x_\nu})$ και $\vec{x} \in U$ με $\vec{x_{k_\nu}} \to \vec{x}$

<u>Απόδειξη 1.4.6</u>: "$\Rightarrow$" Γνωρίζουμε (παλαιότερη πρόταση 1.3.6) $\overline{U} = U \cup U'$. Αν $\vec{x} \in U$ τότε η σταθερή ακολουθία $\vec{x_\nu} := \vec{x}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες $[(\vec{x_\nu}) \subseteq U$ και $\vec{x_\nu} \to \vec{x}]$

Αν $\vec{x} \in U'$, τότε (Πρόταση 1.4.5) έχουμε:

$\exists (\vec{x_\nu}) \subseteq \underbrace{U \setminus \{\vec{x}\}}_{\subseteq U}$: $\vec{x_\nu} \to \vec{x}$.

"$\Leftarrow$" Έστω $(\vec{x_\nu}) \subseteq U$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x}$. Αν $\exists \nu$ με $\vec{x_\nu} := \vec{x}$, τότε $\vec{x} \in U$.

Ενώ, αν $\forall \nu$ $\vec{x_\nu} \neq \vec{x}$, τότε (αφού $(\vec{x_\nu}) \subseteq U$) θα έχουμε $(\vec{x_\nu}) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\}$. Εξάλλου, $\vec{x_\nu} \to \vec{x}$ (από υπόθεση) $\xrightarrow[1.4.5]{\text{Πρόταση}} \vec{x} \in U' \subseteq U' \cup U = \overline{U}$

<u>Απόδειξη 1.4.7.</u> : "$\Longrightarrow$" Έστω $(\vec{x}_\nu)\subseteq U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

Θ.ν.δ.ο. $\vec{x}\in U$.

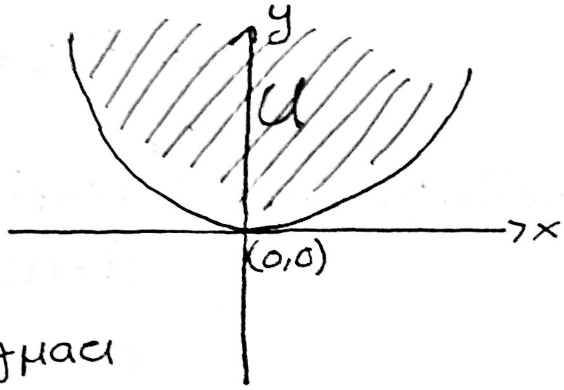
Από την πρόταση 1.4.6. έχουμε $\vec{x}\in\bar{U}$ και από προηγ. πρόταση έχουμε ότι $\boxed{U \text{ κλειστό} \iff U=\bar{U}}$. Άρα, εδώ αφού έχουμε ότι U κλειστό, ισχύει $U=\bar{U}$ και άρα $\vec{x}\in U$.

"$\Longleftarrow$" Έστω ότι $\vec{x}\in\bar{U}$. Τότε, από την Πρόταση 1.4.6., $\exists(\vec{x}_\nu)\subseteq U$, με $\vec{x}_\nu\to\vec{x}$. Από την υπόθεση (δηλαδή τη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας) γνωρίζουμε ότι για κάθε ακολουθία ισχύει $\vec{x}\in U$. $\Rightarrow U=\bar{U} \iff U$: κλειστό.

<u>Άσκηση (κλασική - βλ. θέματα):</u>

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$

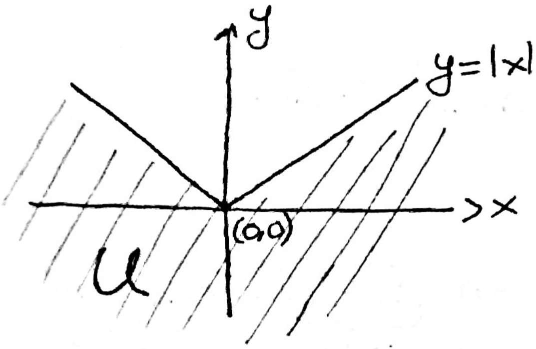
Είναι ανοιχτό/κλειστό/τίποτα από τα δύο και πώς το δείχνουμε;



<u>Λύση:</u> Το σύνολο είναι κλειστό. Πράγματι έστω $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)\in U}_{y_\nu\geq x_\nu^2}$ με $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2}_{x_\nu\to x_0 \text{ και } y_\nu\to y_0}$

Θ.ν.δ.ο. $(x_0,y_0)\in U$: $y_\nu\geq x_\nu^2 \Rightarrow y_0\geq x_0^2 \Rightarrow U$: κλειστό.

Άσκηση: Εξετάστε αν το σύνολο $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<|x|\}$ είναι ανοιχτό / κλειστό / τίποτα από τα δύο



Το U είναι ανοιχτό επειδή το $U^c=\mathbb{R}^n\setminus U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq|x|\}$ είναι κλειστό, αφού:

Έστω $(x_\nu,y_\nu)\in U^c$ με $x_\nu\to x_0$ και $y_\nu\to y_0 \Rightarrow$

$|x_\nu|\to|x_0|$ $\left[0\leq \underbrace{||x_\nu|-|x_0||}_{\to 0}\leq|x_\nu-x_0|\to 0\right]$

Άσκηση: Δείξτε ότι η κλειστή μπάλα και η σφαίρα είναι συμπαγή σύνολα.

Λύση: Έστω $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ και $r>0$. Θ.ν.δ.ο.:

$$\left.\begin{aligned} B(\vec{x}_0,r)&=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{x}_0\|<r\} \\ \text{και}\quad \partial B(\vec{x}_0,r)&=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{x}_0\|=r\}\end{aligned}\right\}\ \text{είναι κλειστά και φραγμένα}$$

Φραγμένα: Θ.ν.δ.ο. $\exists R>0 : \forall \vec{x}\in B(\vec{x}_0,r) : \|\vec{x}\|<R \Rightarrow$

$$\|\vec{x}\|-\|\vec{x}_0\|\leq\|\vec{x}-\vec{x}_0\| \Rightarrow \|\vec{x}\|\leq\|\vec{x}_0\|+\|\vec{x}-\vec{x}_0\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \vec{x}\in B(\vec{x}_0,r) : \|\vec{x}\|\leq\|\vec{x}_0\|+r=R'.$$

$$\Rightarrow \partial B(\vec{x}_0,r)\subseteq B(\vec{x}_0,r)\subseteq B(\vec{0},\underbrace{R'+\varepsilon}_{R})\ (\forall\varepsilon>0)$$

<u>Κλειστά</u>: Θ.ν.δ.ο. $B(\vec{x_0}, r)$ κλειστό (γνωστό, μεν, από προηγούμενη πρόταση, αλλά ας δούμε αν αποδεικνύεται και με ακολουθίες)

Έστω $(\vec{x_\nu}) \subseteq B(\vec{x_0}, r)$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Θ.ν.δ.ο.

$\vec{x} \in B(\vec{x_0}, r) \Leftrightarrow ||\vec{x} - \vec{x_0}|| \leq r$.

$$\vec{x_\nu} \to \vec{x} \Longleftrightarrow \underbrace{||\vec{x_\nu} - \vec{x}||}_{= ||(\vec{x_\nu} - \vec{x_0}) - (\vec{x} - \vec{x_0})||} \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \underbrace{\vec{x_\nu} - \vec{x_0}}_{:= \vec{y_\nu}} \longrightarrow \underbrace{\vec{x} - \vec{x_0}}_{:= \vec{y_0}}$$

$$\Rightarrow ||\vec{y_\nu}|| \to ||\vec{y_0}||$$

Α.Π. 3 | 12-11-19
13ο Μάθημα

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων:

Ορισμός: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$. Έστω ένα $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ να είναι σ.σ. του U. $[\exists (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}\} : \vec{x}_\nu \to \vec{x}_0]$

Παρατήρηση: Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, τότε $U = \text{int} U$, δηλαδή κάθε $\vec{x} \in U$ είναι σημείο συσσώρευσης [$\to$ "πράξη": όταν έχουμε να κάνουμε με όρια συναρτήσεων το "φυσικό" πεδίο ορισμού τους είναι ανοιχτό σύνολο].

Συνέχεια ορισμού: και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι η f συγκλίνει στο ℓ όταν το $\vec{x}$ συγκλίνει στο $\vec{x}_0$ ή η f έχει στο σημείο $\vec{x}_0$ όριο το ℓ, αν $\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}_0\}$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$: $f(\vec{x}_\nu) \to \ell$

Παραδείγματα: (SOS ως ιδέες (όχι για αυτούσια απομνημόνευση))

1) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, υπάρχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$ για την f όταν το (x,y) συγκλίνει στο $(0,0)$;

Λύση: Όχι (δεν υπάρχει τέτοιο $\ell \in \mathbb{R}$) αφού για $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$

αλλά $f(x_0, y_0) = f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{\nu^2}} \xrightarrow{\nu \to \infty} +\infty \neq \ell \in \mathbb{R}$

$\left[\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \neq (0,0), \forall \nu \in \mathbb{N}\right]$

2) Έστω $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Υπάρχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$ για την f όταν το (x,y) συγκλίνει στο $(0,0)$.

<u>Λύση:</u> Επιλέγω αυθαίρετα μια όσο δυνατόν πιο απλή ακολουθία $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\text{πεδίο ορισμού της } f \text{ χωρίς το } (0,0)} \to (0,0)$ και εξετάζω αν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$.

[Εδώ επιλέγω π.χ. $(x_\nu, y_\nu) = \underbrace{\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)}_{\neq (0,0)} \longrightarrow (0,0)$

Τότε $f\left(\frac{1}{\nu}, 0\right) = 0 \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$]

Αν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$, τότε αυτό θα είναι το υποψήφιο $\ell \in \mathbb{R}$ ~~για~~ αφού για μια ακολουθία ισχύει $f(x_\nu, y_\nu) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$.

Θα πρέπει όμως να εξετάσουμε αν το $\ell = \lim_{\nu\to\infty} f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \in \mathbb{R}$

[για τη συγκεκριμένη $\underbrace{(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu)}_{\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)} \to (0,0)$]

Είναι όριο $\forall (x_\nu, y_\nu) \neq (0,0)$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ της $f(x_\nu, y_\nu)$

δηλαδή αν ——— // ——— $f(x_\nu, y_\nu) \to \ell = \lim_{\nu\to\infty} f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu)$.

Μπορούμε να δοκιμάσουμε (αν υποπτευόμαστε ότι ένα όριο $\ell \in \mathbb{R}$ <u>δεν</u> υπάρχει με μια άλλη επιλεγμένη ακολουθία $\underbrace{(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu)}_{\neq (0,0)} \to (0,0)$. Αν $\lim_{\nu\to\infty} f(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) = \begin{cases} \nexists \\ = \hat{\ell} \neq \ell \end{cases}$

[Εδώ $(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$ και $f(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) = f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to \frac{1}{2} \neq 0$

Συνεπώς δεν υπάρχει <u>όριο της f</u>

Αν διαπιστώσαμε ότι για την επιλεγόμενη $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to (0,0)$ έχουμε $f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to \ell \in \mathbb{R}$ και υποπτευόμαστε ότι το $\ell \in \mathbb{R}$ είναι όριο για την f όταν $(x,y) \to (0,0)$ τότε θα πρέπει ν.δ.ο. $\forall (x_0, y_0) \in U \setminus \{(x_0,y_0)\}$ με $\underbrace{(x_0,y_0) \to (0,0)}_{\|\vec{x_\nu}, \vec{y_\nu}\| \to 0}$: $f(x_0,y_0) \to \ell \in \mathbb{R}$.

[<u>Υπόδειξη</u>: Συνήθως το κριτήριο παρεμβολής φτάνει]

Εδώ $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Δοκιμή $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) = \underbrace{\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)}_{\neq (0,0)} \to (0,0)$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) = 0 \xrightarrow{\nu \to \infty} 0 \Rightarrow \ell$ υποψήφιο όριο.

Έστω τυχαία $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ θ.ν.δ.ο. $f(x_\nu, y_\nu) \to 0 \Leftrightarrow$

$0 \leq |f(x_\nu, y_\nu)| \to 0$

Θέλω να βρω $a_\nu \geq 0$, $a_n \to 0$ και $|f(x_\nu, y_\nu)| \leq a_n$

(Αν το βρω τέλειωσα)

$|f(x_\nu, y_\nu)| \leq \|\vec{x_\nu}, \vec{y_\nu}\| \cdot \dfrac{\|\vec{x_\nu}, \vec{y_\nu}\|^2}{\|\vec{x_\nu}, \vec{y_\nu}\|^2} \leq \|\vec{x_\nu}, \vec{y_\nu}\| \to 0$.

Πρόταση: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σ.σ. του U, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε $f(\vec{x}) \to \ell$ όταν $\vec{x} \to \vec{x}_0 \iff$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in U \cap B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\} : |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" (Με απαγωγή σε άτοπο) Θ.δ.ο. αν δεν ισχύει το δεξί μέλος της ισοδυναμίας δεν θα ισχύει και το αριστερό.

Έστω ότι $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0\ \exists \vec{x} \in U \cap B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$:

$$|f(\vec{x}) - \ell| \geq \varepsilon \underset{\delta = \frac{1}{\nu}}{\Longrightarrow} \forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ \vec{x}_\nu \in U \cap B(\vec{x}_0, \tfrac{1}{\nu}) \setminus \{\vec{x}_0\} : |f(\vec{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\vec{x}_\nu}_{\in U \setminus \{\vec{x}_0\}} \to \vec{x}_0 \left[\text{αφού } \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \tfrac{1}{\nu} \to 0\right] :$$

$$|f(\vec{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon \Longrightarrow f(\vec{x}_\nu) \not\to \ell$$

Συνεπώς αν δεν ισχύει το δεξί μέλος δεν ισχύει το αριστερό.

"$\Longleftarrow$" Έστω ότι $(\vec{x}_\nu) \in U \setminus \{\vec{x}_0\}$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$.

Θ.ν.δ.ο. $f(\vec{x}_\nu) \to \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \forall \nu \geq \nu_0$:
$|f(\vec{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \delta > 0, \exists \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0$ $\|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \delta$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το δεξί μέλος (υπόθεση) έχουμε ότι $\exists \delta > 0, \forall \vec{x} \in U \cap B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\} : |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$

Άρα αφού $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0 \iff \forall \tilde{\delta} > 0, \exists \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0 : \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \tilde{\delta}$

υπάρχει το αντίστοιχο $\nu_0 = \nu_0(\tilde{\delta}) = \nu_0(\delta) = N$ έτσι ώστε $\forall \nu \geq \nu_0 : \|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0\| < \tilde{\delta} = \delta \iff$

$\vec{x}_\nu \in B(\vec{x}_0, \delta) \iff (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}_0\} \Longrightarrow |f(\vec{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon.$

Πρόταση (άσκηση): Το όριο $\ell \in \mathbb{R}$ μιας συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$ [$U \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσ. του U], όταν το $\vec{x}$ συγκλίνει στο $\vec{x}_0$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \Leftrightarrow$

$$\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\vec{x}_0\} : \lim_{\nu \to \infty} f(\vec{x}_\nu) = \ell$$

Άσκηση: ν.δ.ο. $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (f(\vec{x}) - \ell) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \ell \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (f(\vec{x}) - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \ell \right) = 0$$

Θεώρημα (2.2.1): $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (f+g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} g(\vec{x})$

όταν φυσικά τα όρια αυτά $\exists$ στο $\mathbb{R}$.

Αντίστοιχα, για το γινόμενο και το πηλίκο (εφόσον $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} g(\vec{x}) \neq 0$)

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, λέγεται συνεχής στο $\vec{x}_0 \in U$, αν $\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$: $f(\vec{x}_\nu) \to f(\vec{x}_0)$.

Άσκηση: Δείξτε ότι οι προβολές $\vec{x}(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$, $i = 1, \ldots, n$ οι πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις το x είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}^n$ δηλαδή σε κάθε $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Α.Π.3. 25-11-19
14ο Μάθημα

<u>Υπενθύμιση:</u>

<u>Ορισμός ορίου πραγματικής συνάρτησης:</u>

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ σε ένα σημείο συσσώρευσης $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ του U.
[μπορεί να ισχύει $\vec{x}_0 \notin U$]: Είναι μοναδικό [πρόταση] και συμβολίζεται με $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \in \mathbb{R}$ και ορίζεται ως το

$\ell \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $\forall (\vec{x}_n) \subseteq U \setminus \{\vec{x}_0\}$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$: $f(\vec{x}_\nu) \to \ell$

ή ισοδύναμα: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in U \cap B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\} : |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$

<u>Άλλοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί:</u>

① $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} |f(\vec{x}) - \ell| = 0$

② [Διόρθωση στις σημειώσεις Δ.Α.: σελ. 60, πρώτη λέξη ~~αφού~~ → Αν]

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \iff \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \ell$

[Απόδειξη: Θέτουμε $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$, τότε $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\} \iff$

$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ και $\underbrace{\vec{x} \neq \vec{x}_0}_{\iff \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > 0} \iff 0 < \|\underbrace{\vec{x} - \vec{x}_0}_{= \vec{h}}\| < \delta$

$\iff \vec{h} \in B(\vec{0}, \delta) \setminus \{\vec{0}\}$.

Επίσης: $\vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{x_0} = U-\vec{x_0} := \{\vec{y}-\vec{x_0} : \vec{y} \in U\}$

Συνεπώς $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta \in (0,\delta_0): \underbrace{\forall \vec{x} \in U \cap B(\vec{x_0},\delta)\setminus\{\vec{x_0}\}}_{\Leftrightarrow \vec{h} \in (U-\vec{x_0}) \cap B(\vec{0},\delta)\setminus\{\vec{0}\}.}:$

$|\underbrace{f(\vec{x})-\ell}_{\vec{x}=\vec{x_0}+\vec{h}}| < \varepsilon$

Αναγκαίες παρατηρήσεις:

α) Αν $f: U \to \mathbb{R}$, τότε $f(\vec{x_0}+\cdot): U-\vec{x_0} \to \mathbb{R}$, όπου

$f(\vec{x_0}+\cdot)(h) := f(\vec{x_0}+\vec{h})$ με $\vec{h} \in (U-\vec{x_0})$ δηλαδή $\exists \vec{x} \in U$:
$\vec{h} = \vec{x}-\vec{x_0}$

β) Εάν $\vec{x_0}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $U \Leftrightarrow$ $\vec{0}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $U-\vec{x_0}$

Απόδειξη: $\forall \varepsilon>0, \underbrace{\exists \vec{x_\varepsilon} \in U\setminus\{\vec{x_0}\} \cap B(\vec{x_0},\varepsilon)}_{\Leftrightarrow U\setminus\{\vec{x_0}\}\cap B(\vec{x_0},\varepsilon) \neq \emptyset}$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \vec{h_\varepsilon} = \vec{x_\varepsilon}-\vec{x_0} \in (U-\vec{x_0})\setminus\{\vec{0}\}\cap B(\vec{0},\varepsilon)$

↑
Άσκηση

Πρόταση: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} g(\vec{x}) = m \longrightarrow$

α) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} (f+g)(\vec{x}) = \ell+m$

[Απόδειξη με χρήση πραγματικών (ℝ) ακολουθιών (Α.Π.Ι):
Έστω $(\vec{x_\nu}) \in U\setminus\{\vec{x_0}\}$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$. Τότε-εξ ορισμού και υποθέσεων

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{x_\nu}) \to \ell \\ g(\vec{x_\nu}) \to m \end{array}\right\} \Rightarrow f(\vec{x_\nu}) + g(\vec{x_\nu}) = \ell + m$$

β) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (f \cdot g)(\vec{x}) = \ell \cdot m$

[Απόδειξη ανάλογα με πριν]

γ) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{\ell}{m}$, όταν $m \neq 0$

[Απόδειξη ανάλογα με πριν].

[Να προσεχθεί αν $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} g(\vec{x}) = m \neq 0$, τότε $\exists\, \delta_0 > 0$:

$g(\vec{x}) \neq 0 \quad \forall \vec{x} \in U \setminus \{\vec{x_0}\} \cap B(\vec{x_0}, \delta_0)$] Άσκηση SOS.

δ) Έστω $V \subseteq \mathbb{R}$, $h: V \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\ell \in V$ και $f(U) \subseteq V$ με $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell$, τότε $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (h \circ f)(\vec{x}) = h(\ell)$

[<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(\vec{x_\nu}) \in U \setminus \{\vec{x_0}\}$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$ τότε - εξ ορισμού

$$\underbrace{f(\vec{x_\nu})}_{\in V} \to \underbrace{\ell}_{\in V} \Rightarrow h(f(\vec{x_\nu})) \to h(\ell)\Big]$$

<u>Εφαρμογές</u>: 1) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} |f(\vec{x})| = |\ell|$

2) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \Big(\Rightarrow \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \sqrt{|f(\vec{x})|} = \sqrt{|\ell|}\Big)$

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συνεχής στο $\vec{x}_0 \in U$:

$\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x}_0$: $f(\vec{x}_\nu) \to f(\vec{x}_0)$

συνεχής στο $A \subseteq U$, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $\vec{x}_0 \in A$.

[SOS-SOS-SOS $\not\Leftrightarrow$ f/A συνεχής]

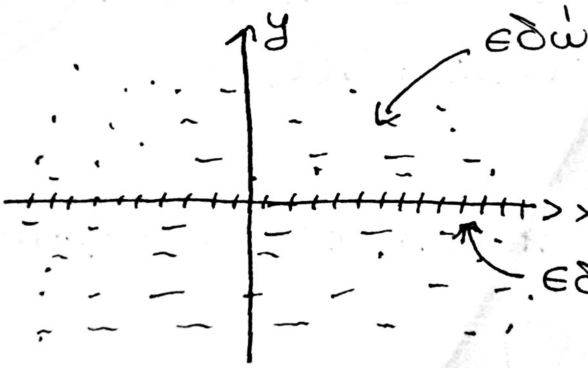
συνεχής, αν η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U.

[$\Leftrightarrow$ η f είναι συνεχής για κάθε $\vec{x}_0 \in U$]

Παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} =$$

$$= \{(x,\underbrace{y}_{=0},\underbrace{f(x,y)}_{=1}) \in \mathbb{R}^3 : (x,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y,\underbrace{f(x,y)}_{=0}) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}$$



εδώ (παντού χωρίς τον άξονα των x): $f=0$.

εδώ $f=1$

Έστω $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $y_0 \neq 0$. Τότε (αφού $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό (?)), έχουμε ότι $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ ανοιχτό. Άρα

$\forall (x_0,y_0)$ με $y_0 \neq 0$ $\exists \varepsilon > 0$: $B((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq U \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$: $f(x,y) = 0 \overset{(?)}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,y_0)$

Α.Π.3 | 26-11-19

11ο μάθημα

Συνέχεια από χθές

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

α) $\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ κλειστό στου $\mathbb{R}^2$

β) $\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ $f(x,y)=0$

(όπου $y_0\neq 0$ και $\varepsilon>0$ έτσι ώστε

$B((x_0,y_0),\varepsilon)\cap\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}=\varnothing$) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$

Λύση: Έστω $(x_\nu,y_\nu)\subseteq\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ με $(x_\nu,y_\nu)\to\underbrace{(x_0,y_0)}_{\in\mathbb{R}^2}$

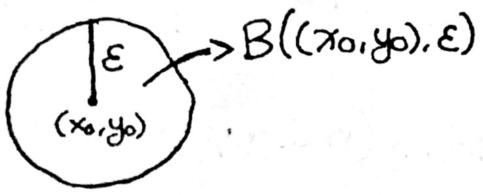
Θ.ν.δ.ο. $(x_0,y_0)\in\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$

$[\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall(\vec{x_\nu})\in\mathcal{U}$ με $\vec{x_\nu}\to\vec{x_0}\in\mathbb{R}^n: x_0\in\mathcal{U}]$

$\Rightarrow y_\nu=0\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ και $x_\nu\to x_0 \wedge \underbrace{y_\nu}_{=0} \to \underset{0}{\underset{\parallel}{y_0}}$

Άρα $(x_0,y_0)=(x_0,0)\in\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$

β)



$f|_{B((x_0,y_0),\varepsilon)}\equiv 0.$

Θ.ν.δ.ο. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$

$\overset{op.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0): f(x_\nu,y_\nu)\to 0$

$\underset{op.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 : \forall \nu\geq \nu_0 : (x_\nu,y_\nu)\in B((x_0,y_0),\varepsilon) \Longleftrightarrow$

$\|(x_\nu,y_\nu)-(x_0,y_0)\|<\varepsilon$

Άρα $\forall \nu\geq\nu_0$ $f(x_\nu,y_\nu)=0 \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

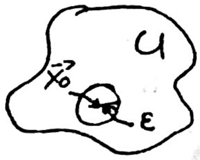
Άρα (επανάληψη) δ.ο. $\forall (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$

δηλαδή. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0 \to f(x_\nu,y_\nu)\to 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (SOS ☹): Έστω ότι Θ.ν.δ.ο. η $f: U\to\mathbb{R}, U\subseteq\mathbb{R}^n$, ώστε να είναι συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο, $\vec{x_0}\in U$

Τότε αρκεί ν.δ.ο. η $f/B((\vec{x_0}),\varepsilon)$ είναι συνεχής στο $\vec{x_0}$, όπου $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $B(\vec{x_0},\varepsilon)\subseteq U$.

Comics:



[Ο λόγος είναι ότι για να δείξουμε τη συνέχεια της f στο $\vec{x_0}$ Θ.ν.δ.ο.: $\forall (\vec{x_\nu})\subseteq U$ με $\vec{x_\nu}\to\vec{x_0}$, ισχύει $f(\vec{x_\nu})\to f(\vec{x_0})$.

Όμως για κάθε τέτοια ακολουθία $\exists \nu_0\ \forall \nu\geq\nu_0\ \vec{x_\nu}\in B(\vec{x_0},\varepsilon)$

Άρα αρκεί να δούμε τι κάνει το «τέλος» (η «ουρά») κάθε τέτοιας ακολουθίας το οποίο (η οποία) βρίσκεται στο $B(\vec{x_0},\varepsilon)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΑΥΤΟ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ !!!

Η $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ με $y_0 \neq 0$

$[(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2]$

Έστω τώρα (το «κακό» κομμάτι της άσκησης)

$(x_0,y_0)\in\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$. Ερώτηση:

Είναι η f όπως την ορίσαμε, συνεχής στο (x_0,y_0)?

Δηλαδή ισχύει για κάθε $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ ότι

$f(x_\nu,y_\nu)\to [f(x_0,y_0)=]\ 1$

Απάντηση: Όχι, δεν ισχύει, αφού

π.χ. για $(x_0,\underbrace{\underbrace{y_0}_{=0}+\tfrac{1}{\nu}}_{\neq 0})\to(x_0,\underset{0}{\overset{}{y_0}})$, $y_0 = 0$

έχουμε : $f(x_0,\underbrace{y_0+1/\nu}_{\neq 0.})=0 \longrightarrow 0\neq 1 = f(x_0,y_0)$

Ερώτηση: Είναι για το προηγούμενο f, η $\underbrace{f|_{\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}}}_{=g}$ συνεχής?

Έχουμε $g:\underbrace{\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}}_{\subseteq\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}$

$g(x,y)=f(x,y)$, για $(x,y)\in\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} \Rightarrow g(x,y)=1$

(Αφού για $(x,y)\in\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$, έχουμε $f(x,y)=1$)

Δηλαδή έχουμε τη συνάρτηση $g:\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\to\mathbb{R}$ με $g(x,y)=1$ $\forall (x,y)$.

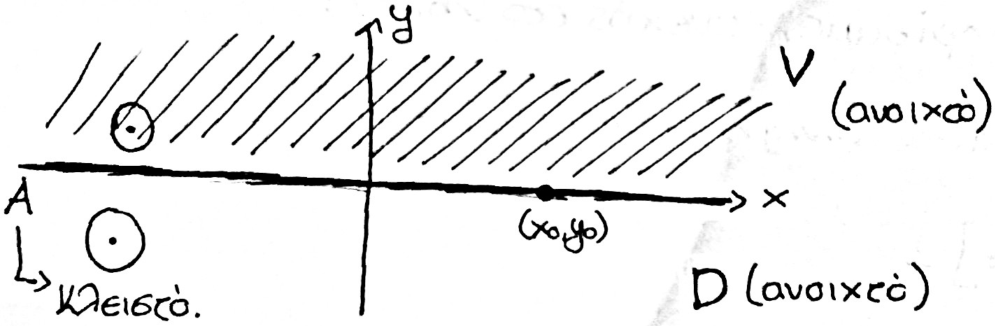
Αυτή είναι συνεχής (δηλαδή είναι συνεχής σε κάθε $(x_0,0)\in\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$

αφού $\forall (x_\nu,y_\nu)\subseteq\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ με $(x_\nu,\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y_\nu})\to(x_0,0)$:

$g(x_\nu,0)=1 \xrightarrow{\nu\to\infty} 1 = g(x_0,0)$

<u>Παράδειγμα (άλλο):</u> $f(x,y)=\begin{cases}1, & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$. Εξετάστε

την $f:\overset{\overset{U}{\shortparallel}}{\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}$ ως προς τη συνέχεια της σε κάθε $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$



Η f είναι συνεχής $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, με $y_0\neq 0$

και μη συνεχής στα σημεία $(x_0,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Ισχύει αφού π.χ. για $(x_\nu,y_\nu)=(x_0,-\frac{1}{\nu})\to(x_0,0)$, έχουμε

$f(x_0,-1/\nu)\to 0\neq 1 = f(x_0,0)$

Το σύνολο $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}$ είναι ανοιχτό αφού το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^2\setminus V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 0\}$ είναι κλειστό

$\Big[\underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\in\mathbb{R}^2\setminus V\Rightarrow y_\nu\leq 0}\to(x_0,y_0)\Leftrightarrow x_\nu\to x_0\wedge \underbrace{y_\nu}_{\leq 0}\to \underbrace{y_0}_{\to\leq 0}\Rightarrow(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus V\Big]$

$\forall (x_\nu, y_\nu) \in A_a \setminus \{0, 0\}$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$

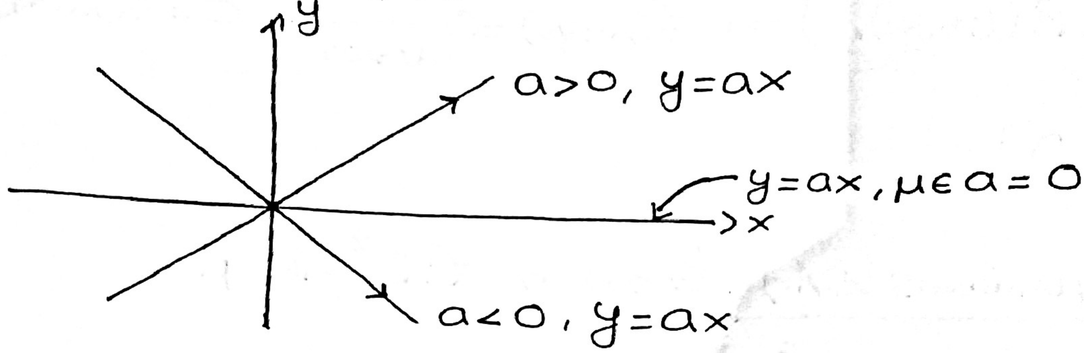
$f(x_\nu, y_\nu) \to 0$

$\iff \forall (x_\nu, y_\nu)$ με $y_\nu = a x_\nu$ και $x_\nu \neq 0$ με $x_\nu \to 0$ $(\Rightarrow y_\nu \to 0)$

$$f(x_\nu, a x_\nu) \to 0$$

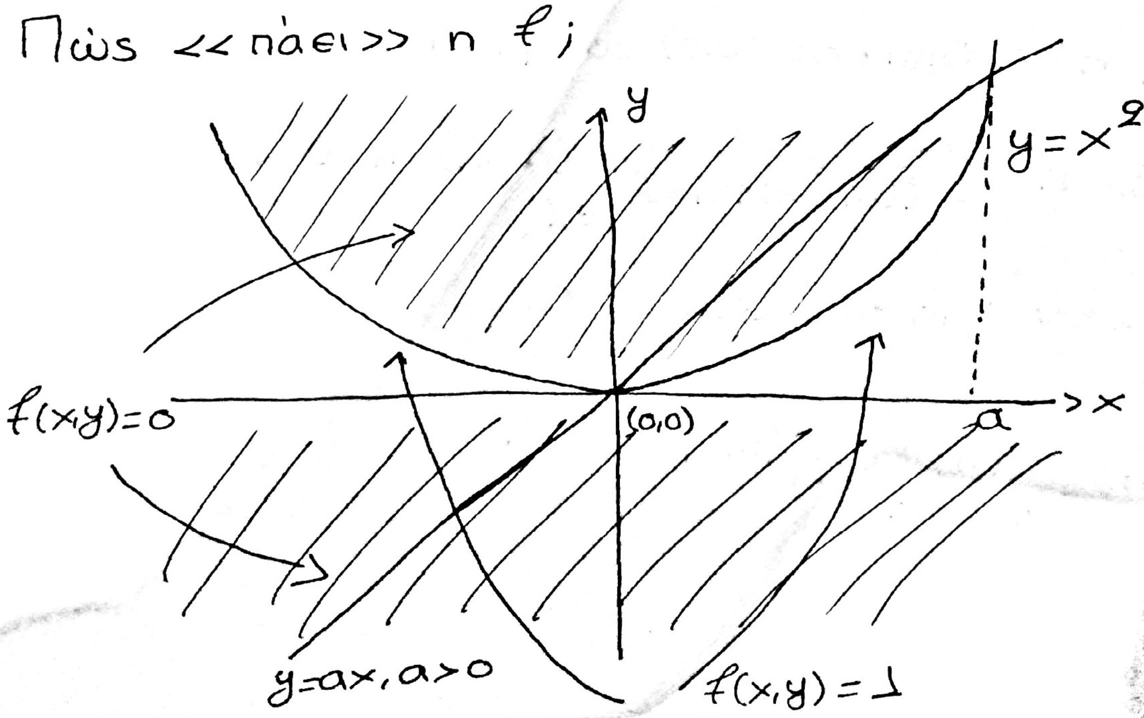
$\iff \forall\, x_\nu \neq 0$ με $x_\nu \to 0$: $f(x_\nu, a y_\nu) \to 0$

$\left[\iff \text{θ.ν.δ.ο. } \lim_{x \to 0} f(x, ax) = 0\right]$



<u>Παρατήρηση</u>: Άρα «κατά μήκος κάθε ευθείας» σημαίνει να περιοριστούμε στην ευθεία αυτή.

Πώς «πάει» η f;



Ανάλογα, το $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<0\}$ είναι ανοιχτό αφού

$\mathbb{R}^2\setminus D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$ είναι κλειστό [ανάλογη απόδειξη].

Έστω ένα $(x_0,y_0)\in \mathbb{R}^2\setminus \underbrace{\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}}_{A}$. Τότε $(x_0,y_0)\in V\cup D$

Έστω, χβτγ, ότι $(x_0,y_0)\in V \xRightarrow{V \text{ ανοιχτό}} \exists \varepsilon>0 \; B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq V \Rightarrow$

$\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon) : f(x,y)=0 \Rightarrow \forall (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0) \; \exists \nu_0 :$

$\forall \nu\geq\nu_0 \; (x_\nu,y_\nu)\in B((x_0,y_0),\varepsilon) \Rightarrow f(x_\nu,y_\nu) = 1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1 = f(x_0,y_0)$

[Ανάλογα για το D].

Άσκηση 30 (Σημειώσεις Δ.Α.) : Έστω η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & y\leq 0 \vee y\geq x^2 \\ 1, & 0<y<x^2 \end{cases}$$

a) Δ.Ο. κατά μήκος κάθε ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων, η f έχει στο $(0,0)$ το όριο μηδέν.

Δηλαδή θ.ν.δ.ο. η $f/_{\{(x,ax) : x\in\mathbb{R}\}=A_a}$ $(a\in\mathbb{R})$ και η

$f/_{\{(0,y) : y\in\mathbb{R}\}=A_\infty}$ έχουν όριο στο $(0,0)$ το 0.

Δηλαδή θ.ν.δ.ο. $\lim\limits_{(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)} f/_{A_a}(x,y)=0 \Leftrightarrow$

Ισχυρισμός: $\forall a\in\mathbb{R},\ f(x,ax)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$

$[a=0,\ f(x,0)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}]$

$[a>0,\ f(x,\underbrace{ax}_{=y})=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ επειδή για $x\leq 0 \Rightarrow \underbrace{ax}_{=y}\leq 0 \Rightarrow$

$f(x,ax)=0$ και για $x>0$ ισχύει $y=ax\geq x^2 \Leftrightarrow a\geq x$

Δηλαδή $f(x,ax)=0 \quad \forall x\leq a]$

$[a<0$ αντίστοιχα (άσκηση)$]$

$\Rightarrow$ Ο ισχυρισμός όπως πάνω είναι λάθος. Όμως ισχύει

ότι $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x\leq a$ (για $a>0$): $f(x,ax)=0$

Ας επικεντρωθούμε σε $a>0$ (οι άλλες περιπτώσεις άσκηση)

Έχουμε ότι $f(x,ax)=0 \ \forall x\leq a \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0} f(x,ax)=0}$

$\Leftrightarrow \forall (x_\nu)\subseteq\mathbb{R}$ με $x_\nu\neq 0$ και $x_\nu\to 0\ \exists \nu_0\ \forall \nu\geq\nu_0$:

$x_\nu\leq a \Rightarrow \forall \nu\geq \nu_0:\ f(x_\nu,ax_\nu)=0 \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

Αυτό ισχύει αντίστοιχα και για τις f/A_∞ με $a\leq 0$

$[$Για $a=0$ $f(x,ax)=f(x,0)=0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0)=0]$

και για την f/A_∞ δηλαδή $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0 \ \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$

Άρα πάνω σε κάθε ευθεία που περνάει απο την αρχή των αξόνων η f έχει στο $(0,0)$ όριο 0.

Περιορισμένη σε οποιαδήποτε που περνάει απο το $(0,0)$ η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Γενικά, (δηλαδή όχι περιορισμένη κάπου) είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Όχι, π.χ. για την $\left(\frac{1}{v}, \frac{1}{2v^2}\right) \to (0,0)$ έχουμε

$$f\left(\frac{1}{v}, \frac{1}{2v^2}\right) = 1 \quad \forall v$$

$$\Big\downarrow v \to \infty$$

$$f(0,0) = 0 \neq 1$$

ΑΠ.3 | 29-11-19
16ο Μάθημα

Τελευταίο μάθημα (που κάναμε): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

με $f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \;\; \forall y \geq x^2 \\ 1, & 0 < y < x^2 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής κατα μήκος κάθε ευθείας που περνάει απο το $(0,0)$, δηλαδή οι $g_a(x) = f(x, ax)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχεις, καθώς και η $g_\infty(y) = f(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Όμως η f δεν είναι συνεχής, αφού π.χ. αν επιλέξουμε $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu^2}\right) \to (0,0)$, αλλά $f(x_\nu, y_\nu) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0,0)$

Ασκήσεις για νόρμες, $\mathbb{R}^n$, ακολουθίες, ανοιχτά και κλειστά σύνολα, συνεχεια πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων, θέματα εξετάσεων.

★ Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για όρια και συνεχεια πραγματικών συναρτήσεων.

1) Αν το $\vec{x_0} \in U$ είναι σημείο συσσ. τοτε $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{f \text{ συνεχής στο } \vec{x_0}}$ $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0})}$

$\Leftrightarrow \forall (\vec{x_\nu}) \subseteq U$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$, $f(\vec{x_\nu}) \to f(\vec{x_0})$ $\quad\quad$ $\Leftrightarrow \forall (\vec{x_\nu}) \subseteq U \setminus \{\vec{x_0}\}$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$, $f(\vec{x_\nu}) \to f(\vec{x_0})$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \vec{x} \in U \cap B(\vec{x_0}, \delta) : |f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| < \varepsilon$

[Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει και το (*): Άσκηση]

2) Ισχύει το πάρα πολύ πρακτικό θεώρημα (βλ. το αντίστοιχο για όρια συναρτήσεων)

<u>Θεώρημα:</u> $f, g : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\vec{x_0} \in U \Rightarrow$ και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\vec{x_0}$:

$$(f+g)(\vec{x}), \quad \alpha f (\alpha \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g(\vec{x}), \quad \frac{f}{g}(x), \ g(\vec{x_0}) \neq 0$$

$(h \circ f)(\vec{x})$ για $h : V \to \mathbb{R}$, $f(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$ συνεχής στο $\vec{x_0}$.

$$[\forall (\vec{x_\nu}) \subseteq U, \text{ με } \vec{x_\nu} \to \vec{x_0}, \ f(\vec{x_\nu}) \to f(\vec{x_0}) \xrightarrow[\text{στο } f(\vec{x_0})]{h \text{ συνεχής}}$$

$$(h \circ f)(\vec{x_\nu}) \to (h \circ f)(\vec{x_0})$$

3) <u>Εφαρμογή του Θεωρήματος:</u>

Οι πιο απλές συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ και έχουν πραγματικές τιμές είναι οι προβολές στους άξονες.

$\mathbb{R}^n \ni \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i \ (\forall i = 1, \ldots, n)$ είναι συνεχής (σε όλο το π.ο. της, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}^n$)

$$\text{αφού} \quad \forall (\vec{x_\nu}) \in \mathbb{R}^n \text{ με } \underset{(x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)})}{\vec{x_\nu}} \to \underset{(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)})}{\vec{x_0}} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall \vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

$\Rightarrow$ Όλες οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς (όπου ορίζεται ο παρονομαστής)

Άσκηση 23 (Δ.Α.):

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Η f είναι συνεχής σε κάθε $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

Αφού το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι ανοιχτό και η

$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ είναι ρητή (ορίζεται παντού στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$) γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι συνεχής

Τι ισχύει στο $(0,0)$; Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$

δηλαδή $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, αφού $\forall \underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\neq(0,0)} \to (0,0)$

Ισχύει $\underbrace{0 \leq \dfrac{|x_\nu|\, y_\nu^2}{x_\nu^2+y_\nu^2}}$ $\xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

$$\leq \frac{|x_\nu|(x_\nu^2+y_\nu^2)}{x_\nu^2+y_\nu^2} \leq |x_\nu| \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ f συνεχής στο $(0,0)$.

Όρια και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων.
(Για $m=1$ έχουμε την περίπτωση πραγματικών συναρτήσεων)

Ορισμός: Η $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ σημ. συσσ. του U, τότε λέμε ότι η $\vec{f}$ έχει όριο το $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ στο σημείο $\vec{x_0}$.
$\Leftrightarrow \forall (\vec{x_\nu}) \subseteq U \setminus \{\vec{x_0}\}$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$:

$$\vec{f}(\vec{x_\nu}) \to \vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} \vec{f_1}(\vec{x_\nu}) \\ \vdots \\ \vec{f_m}(\vec{x_\nu}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{\ell_1} \\ \vdots \\ \vec{\ell_m} \end{pmatrix}$$

Το όριο αν υπάρχει είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) \ (= \vec{\ell}) \in \mathbb{R}^m$

Από τους ορισμούς ορίου πραγματικής και διανυσματικής συνάρτησης και μία ιδιότητα σύγκλισης ακολουθιών στον $\mathbb{R}^k$, ~~προκύπτει~~ προκύπτει
wow!!

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\ell} \iff \forall j = 1, \dots, m : \lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f_j(\vec{x}) = \vec{\ell}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Η $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, λέγεται συνεχής στο $\vec{x_0}$ $:\Leftrightarrow \forall (\vec{x_\nu}) \subseteq U$ με $\vec{x_\nu} \to \vec{x_0}$:
$\vec{f}(\vec{x_\nu}) \to \vec{f}(\vec{x_0})$.

Αν $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ τότε $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x_0} \Leftrightarrow$

$\forall j=1,\dots,m$ f_j συνεχής στο $\vec{x}_0$

Ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες όπως για τις πραγματικές βλ. (SOS) [Άσκηση] «άλγεβρα ορίων» και «συνεχών συναρτήσεων», Θεωρήματα 2.3.1 και 2.3.2 (Σημειώσεις)

$\boxed{\text{SUPER SOS}}$ Συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγές.

<u>Θεώρημα:</u> $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές τότε $\vec{f}(U)$ είναι συμπαγές.

<u>Απόδειξη:</u> Χρήση πρότασης 1.4.8: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\iff \forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U \ \exists (\vec{x}_{k_\nu})$ και $\vec{x} \in U: \vec{x}_{k_\nu} \to \vec{x}$

Έστω $(\vec{y}_\nu) \subseteq \vec{f}(U) \Rightarrow \exists (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ με $\vec{f}(\vec{x}_\nu) = \vec{y}_\nu$

$\xRightarrow{U \text{ συμπαγές}} \exists (\vec{x}_{k_\nu})$ και $\vec{x} \in U: \vec{x}_{k_\nu} \to \vec{x} \xRightarrow[\text{συνεχής}]{f}$

$\underbrace{\vec{f}(\vec{x}_{k_\nu})}_{\vec{y}_{k_\nu}} \to \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{\in f(U)}$

Ειδικότερα, για $m=1$, ισχύει $(\text{SUPER-SOS})^2$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ $(=\mathbb{R}^m$ για $m=1)$ συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε το $f(U)$, είναι συμπαγές και η f λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο στο U, δηλ. $\exists\, x_{min}, x_{max} \in U: \min f = f(x_{min}) \leq f(\vec{x}) \leq f(x_{max}) = \max f \quad \forall x \in U$,

όπου $\max f = \max f(U) = \max\{f(\vec{x}) \in \mathbb{R} : \vec{x} \in U\}$

Αποδειξη για το min:

$f(U) \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές (κλειστό και φραγμένο)

$\Rightarrow \exists \inf f = \inf f(U) = \inf \{ f(\vec{x}) : \vec{x} \in U \} \in \mathbb{R}$

δηλ. $\forall \nu \in \mathbb{N} \ \exists \ \vec{x}_\nu \in U : f(\vec{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + 1/\nu]$.

$\Rightarrow \underbrace{f(\vec{x}_\nu)}_{\in f(U)} \to \inf f$. Αφού $f(U)$ είναι κλειστό

ισχύει ότι $\inf f \in f(U) \Rightarrow \exists \ \vec{x}_{min} \in U$:

$f(\vec{x}_{min}) = \inf f = \min f$.

ΑΠ3 ; 2-12-19
; 17ο Μάθημα

Ένα τελευταίο πριν μπούμε στη διαφόριση:

Πρόταση 1.4.8: $\underbrace{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ συμπαγές}}$ $\iff$ $\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ $\exists (\vec{x}_{k_\nu})$ και $\vec{x} \in U \Rightarrow \vec{x}_{k_\nu} \to \vec{x}$

: κλειστό και φραγμένο

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" Έστω $(\vec{x}_\nu) \subseteq U$. Αφού U φραγμένο,

$\Rightarrow \exists (\vec{x}_{k_\nu}) \subseteq (\vec{x}_\nu)$ με $\vec{x}_{k_\nu} \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \vec{x} \in U$

U κλειστό
(Πρόταση 1.4.7. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\iff$ $\forall (\vec{x}_\nu) \subseteq U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in U$

"$\Longleftarrow$" Έστω ότι U ΟΧΙ φραγμένο. Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}_\nu \in U$ με $\|\vec{x}_\nu\| \geq \nu$.

$\Rightarrow \forall (\vec{x}_{k_\nu}) \subseteq (\vec{x}_\nu)$: $\|\vec{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu$

[$\nu \mapsto k_\nu$ με $k_{\nu+1} > k_\nu$. Άρα $k_1 \geq 1$ και αν $k_\nu \geq \nu$ τότε $k_{\nu+1} \geq k_\nu + 1 \geq \nu + 1$]. Συνεπώς η $(\vec{x}_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη $\xrightarrow{\text{πρόταση}}$ $(\vec{x}_{k_\nu})$ δεν είναι συγκλίνουσα. Άτοπο.

$\Rightarrow$ Άρα το U είναι φραγμένο.

Θ.ν.δ.ο. U κλειστό:

Έστω $(\vec{x}_\nu) \in U$ με $\vec{x}_\nu \to \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (\vec{x}_{k_\nu}) \subseteq (\vec{x}_\nu) : (\vec{x}_{k_\nu}) \to \vec{x}$

$\Rightarrow$ Απο υπόθεση, $\vec{x} \in U$

[Απο υπόθεση ξέρουμε οτι για την επιλεγμένη $(\vec{x}_\nu)$ υπάρχει κάποια $(\vec{x}_{\ell_\nu}) \subseteq (\vec{x}_\nu)$ και ένα $\vec{y} \in U$ τέτοια ώστε $(\vec{x}_{\ell_\nu}) \to \vec{y} \in U$. Όμως, εμείς μόλις είδαμε οτι για κάθε $(\vec{x}_{k_\nu}) \subseteq (\vec{x}_\nu)$ ισχύει $\vec{x}_{k_\nu} \to \vec{x}$.
Συνεπώς και για την $(\vec{x}_{\ell_\nu})$ θα ισχύει αυτό (αφού είναι υπακολουθία) και άρα απο τη μία $\vec{x}_{\ell_\nu} \to \vec{y}$, απο την άλλη $\vec{x}_{\ell_\nu} \to \vec{x} \xrightarrow[\text{ορίου}]{\text{μοναδικότητα}} \vec{x} = \vec{y} \xrightarrow[\vec{y} \in U]{} \vec{x} \in U$.]

Κεντρικό κεφάλαιο Α.Π. (III) / Διανυσματικής Ανάλυσης.

Διαφόριση (= Παραγώγιση) στου $\mathbb{R}^n$

Σημαντική διαφορά με Α.Π.(I) / Πραγ. συναρτ. ΜΙΑΣ Μεταβ.

Υπάρχουν περισσότερα «είδη» διαφόρισης !

Μια απο αυτές είναι η αντίστοιχη αυτής στου Α.Π. (I).

3.1 Μερικές παράγωγοι (Partial Derivatives) (not some

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό [για να είμαστε σίγουροι οτι κάθε $\vec{x} \in U$ είναι σημείο συσσώρευσης (ως εσωτερικό σημείο), αφού θα χρειαστούμε όρια συναρτήσεων στο σημείο $\vec{x}$]
Η f λέγεται μερικώς διαφορίσιμη ως προς την i-οστή μεταβλητή ($i = 1, \dots, n$) στο

σημείο $\vec{x}$ αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f στο $\vec{x}$ ως προς την i-οστή μεταβλητή.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e_i}) - f(\vec{x})}{h} \in \mathbb{R},$$

$$\Big[\vec{e_i} = (0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1},0,\ldots,0)\Big]$$

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\vec{x}$ ως προς κάθε μεταβλητή x_i λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\vec{x}$ και το διάνυσμα:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right) =: \nabla f(\vec{x}).$$

ονομάζεται κλίση της f στο $\vec{x}$, και συμβολίζεται και με grad $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ [κλίση = gradient]

<u>Παρατήρηση</u>: Αν έχουμε όλες τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $\vec{x} \in U$, (δηλαδή «όλες» = «$\forall i = 1,\ldots,n$») τότε υπάρχει η κλίση της f στο $\vec{x}$ και αντίστροφα.

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $\vec{x} \in U$ τότε λέμε (σκέτα) ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη.

Παρατήρηση (για συμβολισμούς):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = f_{x_i}(\vec{x}) = \partial_{x_i} f(\vec{x}) \; [= \partial_i f(\vec{x})]$$

ΣΟΣ **Παρατήρηση (Ερμηνεία της μερικής παραγώγου):**

Η μερική παράγωγος της f στο $\vec{x}$ ως προς x_i $=$ η παράγωγος της συνάρτησης μιας μεταβλητής που προκύπτει αν κρατήσουμε όλες τις συντεταγμένες x_j, με $j \neq i$ (του σημείου σταθερές και παραγωγίσουμε μόνο ως προς τη μια πραγματική μεταβλητή $\bar{x}$

Πιο συγκεκριμένα: Έστω $i = 1, \ldots, n$ σταθερό και

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$f_i(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\vec{x})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i)$$

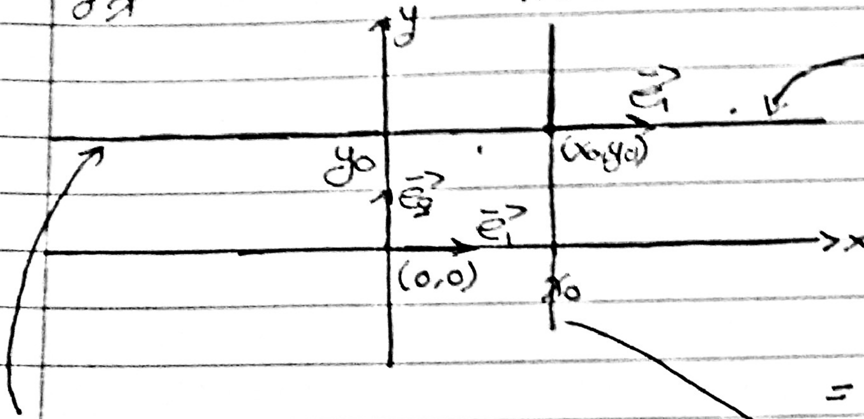
Γεωμετρικά: Όταν θέλω να υπολογίσω το $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ περιορίζω την f στην ευθεία $\vec{x} + h\vec{e}_i$ και υπολογίζω την παράγωγο $g'(0)$ της συνάρτησης $g(h) := f(\vec{x} + h\vec{e}_i)$

Συνήθως (ιδίως σε εξετάσεις, θεωρούμε $n = 2 \vee 3$)

Παράδειγμα:

α) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$



$\{(x,y_0) : x\in\mathbb{R}\} =$

$= \{(x_0,y_0)+h(1,0) : h\in\mathbb{R}\}$

$= \{(x_0,y_0)+(x-x_0,0) : x\in\mathbb{R}\}$

$= \{(x_0,y_0)+(x-x_0)\cdot(1,0) : x\in\mathbb{R}\}$

$\{(x_0,y_0)+h(0,1), h\in\mathbb{R}\}$.

Εδώ ορίζεται η συνάρτηση

$\underset{\in\mathbb{R}}{x} \longmapsto f(x,y_0)$

(ή $\underset{\in\mathbb{R}}{h} \longmapsto \underbrace{f(x_0+h,y_0)}_{=:g(h)}$)

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 e^{x_0^2+y_0^2}$

<u>και</u>

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 e^{x_0^2+y_0^2}$

$\nabla f(x_0,y_0) = 2e^{x_0^2+y_0^2}(x_0,y_0)$

Άσκηση: $\frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_i} =$;

Α.Π. 3 | 3-12-19
| 12ο Μάθημα

Έστω η $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

[η f είναι συνεχής αφού $\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{x_0}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$]

Ποιες είναι (αν υπάρχουν) οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$?

$$f(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n: \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{d}{dx_i} \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2) + x_i + (x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2)} =$$

Τα θεωρούμε σταθερές εδώ αφού παραγωγίζουμε ως προς x_i

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{\sqrt{\dots}} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \vec{x} \neq \vec{0}: \quad \nabla \|\vec{x}\| = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}}$$

Στο $\vec{x_0} = \vec{0}$, τι συμβαίνει; Δηλαδή $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) \in \mathbb{R}$;

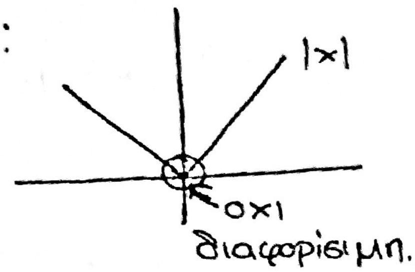
Δηλαδή $\forall i = 1, \dots, n$ $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{0} + h\vec{e_i}) - f(\vec{0})}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\|h\vec{e_i}\| - \|\vec{0}\|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \nexists \text{ στο } \mathbb{R}.$$

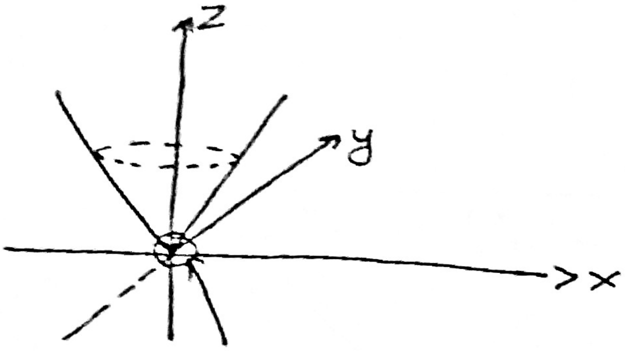
Άρα $\nexists \nabla \|\vec{x}\|$ για $\vec{x} = \vec{0}$

Ερμηνεία: Για $n=1$ (n διάσταση του $\mathbb{R}^n$):

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = \sqrt{x_1^2} = |x|$$

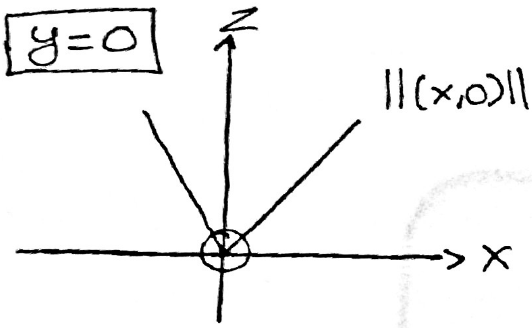


Για $n=2$: $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

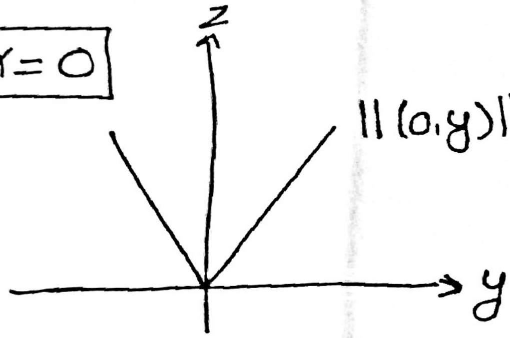


όχι μερικώς διαφορίσιμη η $(x,y) \longmapsto \|(x,y)\|$

$\boxed{y=0}$



$\boxed{x=0}$



Παράδειγμα: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, αφού $(x,y) \longmapsto x$, $(x,y) \longmapsto y$ (προβολές στους άξονες) είναι συνεχείς (σε όλο το $\mathbb{R}$) ($|x-x_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$) $\xrightarrow[\text{ορίων}]{\text{άλγεβρα}}$ $(x,y) \longmapsto xy$, $(x,y) \to x^2+y^2$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ [η ρητή συνάρτηση που (καταρχάς) ορίζεται (σίγουρα) στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$] $\underbrace{(x,y)}_{\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Είναι συνεχής στο $(0,0)$;

Δηλαδή ισχύει $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;

Ισχύει $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;

<u>Όχι</u> αφού π.χ. για την ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$

ισχύει $f(x_\nu, y_\nu) = \frac{1}{2} \neq 0$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Μερική παράγωγος στο $(x,y) \neq (0,0)$ [το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι ανοιχτό:

$\forall (x,y) \neq (0,0)\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ B((x,y), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

και (όπως τα όρια, η συνέχεια) η μερική διαφορισιμότητα είναι μια τοπική ιδιότητα της $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Longrightarrow$

<u>(SOS-πληροφορία)</u>: Όταν εξετάζω αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή (μερικώς) διαφορίσιμη σε ένα σημείο, αρκεί να περιοριστώ σε μια όσο μικρή θέλω ανοιχτή μπάλα με κέντρο το σημείο.

<u>Ερμηνεία</u>: Δεν μας πειράζει που σε ~~πάρα~~ πολλά Θεωρήματα λέει: «Έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό» θα περιοριζόμαστε σε ανοιχτά υποσύνολα του U, όπου χρειάζεται.

Αρκεί να εξετάσω αν υπάρχει η μερική παράγωγος στο

$f/_{B((x_0,y_0),\varepsilon)}$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Είδαμε : συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

όχι συνεχής στο $(0,0)$.

Για $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) =$

$$= \frac{\partial x(xy)}{x^2+y^2} + xy\, \partial x\left((x^2+y^2)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} + xy\left((-1)\frac{\partial x(x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)y - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Για λόγους συμμετρίας προφανώς $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}}{h} = 0$$

Πάλι για λόγους συμμετρίας $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Άρα η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Άρα, η f είναι μερικώς διαφορίσιμη (σε όλο το $\mathbb{R}^2$), και ας μην είναι συνεχής στο $(0,0)$ $\overset{\nabla}{o}$.

[Δηλαδή: f μερικώς διαφ. σε ένα σημείο $\not\Rightarrow$ f συνεχής σε αυτό το σημείο $\overset{\nabla}{o}$]

[Αυτό συμβαίνει στο παράδειγμα, επειδή το $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ προκύπτει από την παραγώγιση (διαφόριση), στο $x=0$ ως προς x της f περιορισμένης στον άξονα των x, όπου όμως η f είναι σταθερή και ίση με 0].

[Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα].

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\vec{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $n \geq 2$ $(m \in \mathbb{N}=\{1,2,\ldots,\})$. Η $\vec{f}$ λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$ ως προς την i-οστή μεταβλητή, αν όλες οι συνιστώσες της f_j, $j=1,\ldots,m$ έχουν αυτή την ιδιότητα:

<u>μερ. διαφ. στο $\vec{x} \in U$</u>, όταν μερ. διαφ. στο $\vec{x}$ ως προς x_i, $\forall i=1,\ldots,n$.

<u>μερ. διαφ.</u>, όταν είναι μερικώς διαφ. σε κάθε $\vec{x} \in U$.

$\Leftrightarrow \forall j=1,\ldots,m,\ \forall i=1,\ldots,n: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας

[προσοχή στη διάταξη γραμμών και στηλών συνιστώσες $f_j \to$ γραμμές συντεταγμένες $x_i \to$ στήλες].

$$J_{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}), & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}), & \cdots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{m\times n}$ ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της $\vec{f}$ στο $\vec{x}$.

<u>Προσοχή</u>: Γενικά, ως συνήθως διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, θα θεωρούνται πάντα ως πίνακες $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Παρόλα αυτά, ιδίως στην ανάλυση, σε αντίφαση με αυτό γράφουμε π.χ. $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ και ακόμα χειρότερα, αντί για το σωστό $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

γράφουμε $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Όπου όμως, θα πρέπει να κάνουμε πράξεις με διανύσματα και πίνακες θα πρέπει να ακολουθούμε τον σωστό κανόνα (βλ. αρχή της παρατήρησης)

<u>Θεώρημα (Άλγεβρα Ιακωβιανών πινάκων)</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\nu \geq 2$ και $\vec{f}, \vec{g} : U \to \mathbb{R}^m$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}$, μερικώς διαφορ. στο $\vec{x} \in U$. Τότε οι συναρτήσεις:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{f} + \vec{g} : U \to \mathbb{R}^m \\ &\varphi \cdot \vec{f} : U \to \mathbb{R}^m \\ &\vec{f} \cdot \vec{g} : U \to \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{είναι μερικώς διαφ. στο } \vec{x} \in U$$

$(\Leftrightarrow \exists$ Ιακωβιανός πίνακας στο $\vec{x})$

και ισχύουν :

α) $J_{\vec{f}+\vec{g}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{x}) + J_{\vec{g}}(\vec{x})$

β) $\underbrace{\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x})} = \underbrace{\vec{f}(\vec{x})^T}_{\in\mathbb{R}^{1\times m}} \cdot \underbrace{J_{\vec{g}}(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} + \vec{g}(\vec{x})^T \cdot J_{\vec{f}}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{1\times m}$

$= \underbrace{\vec{f}(x)}_{\in\mathbb{R}^m} \cdot \underbrace{\vec{g}(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}$

γ) $J_{\varphi\vec{f}}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \cdot J_{\vec{f}}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{x})\,\nabla\varphi(\vec{x}).$

<u>Απόδειξη</u>: [ουσιαστικά πρέπει να δούμε αν υπάρχουν οι Ιακωβιανοί πίνακες στα αριστερά των τύπων αυτών και ισούνται με τις εκφράσεις στα δεξιά]

α)

$$J_{\vec{f}+\vec{g}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1+g_1)(\vec{x})}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial(f_1+g_1)(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(f_m+g_m)(\vec{x})}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial(f_m+g_m)(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}), & \cdots\cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}), & \cdots\cdots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$= J_{\vec{f}}(\vec{x}) + J_{\vec{g}}(\vec{x})$$

β) $$\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x}) = \nabla\big(\underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}^m}\cdot\vec{g}(\vec{x})\big) = \nabla\Big(\sum_{j=1}^{m}\underbrace{f_j(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}}\cdot g_j(\vec{x})\Big) =$$

$$=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{f_j(\vec{x})\cdot g_j(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{j=1}^{m}f_j(\vec{x})\cdot g_j(\vec{x})\Big) =$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\big(f_j(\vec{x})\cdot g_j(\vec{x})\big)}_{= g_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}) + f_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\vec{x})}, \dots, \sum_{j=1}^{m}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n}\big(f_j(\vec{x})\cdot g_j(\vec{x})\big)}_{= g_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\vec{x}) + f_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\vec{x})}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big[g_j(\vec{x})\cdot\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\vec{x})\Big) + f_j(\vec{x})\Big(\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\vec{x})\Big)\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\underbrace{g_j(\vec{x})\cdot\nabla f_j(\vec{x})}_{(g_1(\vec{x}),\dots,g_m(\vec{x}))J_{f}(\vec{x})} + \sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{x})\cdot\nabla g_j(\vec{x})$$

$$(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))J_f(\vec{x}) =$$

$$= (g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))\begin{pmatrix}\nabla f_1(\vec{x})\\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x})\end{pmatrix}$$

Άρα τελικά έχουμε $\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x})^T\cdot J_{\vec{f}}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{x})^T\cdot J_{\vec{g}}(\vec{x})$

όπου θεωρούμε $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Longleftrightarrow$

$\vec{f}(\vec{x})^T = \left(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\right) \in \mathbb{R}^{1 \times m}.$

δ) $$J_{\varphi \vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi f_1)(\vec{x}), & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_n}(\varphi f_1)(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi f_m)(\vec{x}), & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_n}(\varphi f_m)(\vec{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{x}), & \dots, & f_1(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{x}), & \dots, & f_m(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\vec{x})\right)}_{= \nabla \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times m}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\vec{x}), & \dots, & \varphi(\vec{x}) \cdot \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\vec{x}), & \dots, & \varphi(\vec{x}) \cdot \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{= \underbrace{\varphi(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{J_{\vec{f}}(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}}$$

$$\Longrightarrow J_{\varphi f}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \cdot J_f(\vec{x}) + \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{1 \times n}}.$$

Ορισμός (ουσιαστικά ο σημαντικότερος του Α.Π. ΙΙΙ): Η $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ $\underbrace{\text{γραμμική απεικόνιση } D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}_{:\Leftrightarrow \text{ πίνακας } D \in \mathbb{R}^{m \times n}}$

έτσι ώστε: $\boxed{\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}}$ $(\in \mathbb{R}^m)$

και διαφορίσιμη $:\Leftrightarrow$ η $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\vec{x} \in U$.

Ειδικότερα για $n \in \mathbb{N}$ και $m = 1$. Η $f: U \to \mathbb{R}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ $D \in \mathbb{R}^{1 \times n}$:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - D\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0 \quad (\in \mathbb{R})$$

και για $n = m = 1$, η $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $x \in I$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0 \ (\in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}^{= f'(x).} = D$$

Επίσης από τον ορισμό ορίου διανυσματικής συνάρτησης

η $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$

$$\Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m : \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f_j(\vec{x}+\vec{h}) - f_j(\vec{x}) - (d_{j1}, \dots, d_{jn})\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0,$$

όπου $D = \begin{pmatrix} d_{11}, & \dots, & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}, & \dots, & d_{mn} \end{pmatrix}$

Δηλαδή (SOS): Η $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη

στο $\vec{x} \in U \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m$ οι $f_j : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες

στο $\vec{x} \in U$.

(SOS-SOS-SOS): Θεώρημα: Έστω ότι η $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$,

($U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό) είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$, τότε:

a) η $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x} \in U$

β) η $\vec{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$ και για το

$D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του ορισμού ισχύει $D = J\vec{f}(\vec{x})$

Απόδειξη: Θ.ν.δ.ο. $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \underbrace{\left(\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x})\right)}_{\|\vec{h}\| \cdot \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{h}}{\|\vec{h}\|} + D\vec{h}} = \vec{0}$

$\Longrightarrow$

$$= \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\|}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})-D\vec{h}}{\|\vec{h}\|}}_{=\vec{0},\ \text{εξ-ορισμού}} + \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} D\vec{h}}_{=\vec{0}\ (*)}$$

$(*)$. $\|D\vec{h}\|^2 = \sum_{J=1}^{m}\left((d_{J1},\dots,d_{Jn})\cdot\vec{h}\right)^2 \underset{C-S}{\leq}$

$$\sum_{J=1}^{m} \underbrace{\|(d_{J1},\dots,d_{Jn})\|^2}_{=\sum_{i=1}^{n} d_{Ji}^2} \cdot \|\vec{h}\|^2 = \underbrace{\sum_{J=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{Ji}^2\right)}_{=:\|D\|^2 \geq 0} \cdot \|\vec{h}\|^2$$

$\Longrightarrow \|D\vec{h}\| \leq \|D\| \cdot \|\vec{h}\|$

Αρα αφού (ισχυρισμος) $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} D\vec{h} = \vec{0} \Longleftrightarrow$

$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|D\vec{h}\|$ και επειδή $\|D\vec{h}\| \leq \underset{\substack{\| \\ c\in\mathbb{R}}}{\|D\|} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\vec{h}\|}$ προκύπτει το αποδεικτέο.

Α.Π. 3 : 6-12-19
19ο Μάθημα.

$\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, η $\vec{f}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\vec{x}$

$$:\Leftrightarrow \exists \; D = \begin{pmatrix} d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ d_{m1}, d_{m2}, \dots, d_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{έτσι ώστε}$$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \underbrace{\frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})-D\vec{h}}{\|\vec{h}\|}}_{=\vec{g}(\vec{h})} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \quad \xLeftrightarrow[\text{διανυσματικής συνάρτησης}]{\text{ιδιότητα ορίου}}$$

$$\forall j=1,\dots,m: \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \underbrace{\frac{f_j(\vec{x}+\vec{h})-f_j(\vec{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|}}_{=g_j(\vec{h})} = 0 \; (\in \mathbb{R})$$

$$\xLeftrightarrow{\text{ορισμός}} \forall j=1,\dots,m: f_j \text{ διαφορίσιμη στο } \vec{x}, \text{ με } \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

[Άρα: $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ αν-ν

$$\exists \underbrace{(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)}_{=\tilde{d}} \in \mathbb{R}^n: \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-\tilde{d}\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$]

<u>Θεώρημα:</u> $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό είναι

διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U \Rightarrow$

α) $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}$.

β) $\vec{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\vec{x}$, με

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = d_{ji}, \quad \forall j=1,\dots,m \quad \forall i=1,\dots,m.$$

$\Rightarrow$ Ο πίνακας $D\in\mathbb{R}^{m\times n}$ του ορισμού είναι $\overset{\circ}{=}$ μοναδικός Ιακωβιανός πίνακας $J\vec{f}(\vec{x})$, δηλαδή $\vec{f}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x} \Rightarrow D = J\vec{f}(\vec{x})$

Στην περίπτωση αυτή ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΤΟΤΕ ο Ιακωβιανός πίνακας $J\vec{f}(\vec{x})$ ονομάζεται παράγωγος της $\vec{f}$ στο $\vec{x}$.

[ή διαφορικό της f στο $\vec{x}$] και συμβολίζεται με $D\vec{f}(\vec{x}) = [= J\vec{f}(\vec{x})]$. Αν η $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, είναι διαφορίσιμη (:$\Leftrightarrow$ είναι διαφορίσιμη $\forall \vec{x}\in U$), τότε η απεικόνιση $\vec{x} \longmapsto D\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ονομάζεται παράγωγος της $\vec{f}$.

Ειδικότερα για $m=1$: Αν $f: U\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}\in U\subseteq\mathbb{R}^n$ τότε $Df(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \in (\mathbb{R}^{1\times n} =)\, \mathbb{R}^n$. Από την παρατήρηση πιο πάνω: Αν $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}: U \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}$ τότε

$$D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} Df_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ Df_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = J\vec{f}(\vec{x})$$

(και φυσικά $\forall j = 1,\dots,m$: f_j διαφ. στο $\vec{x}$) [και αντίστροφα].

Απόδειξη του (β): Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall j=1,\dots,m$: ισχύει $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})=d_{ji}$, $\forall i=1,\dots,n$.

Έχουμε: $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f_j(\vec{x}+\vec{h})-f_j(\vec{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|}=0 \implies$

για $\delta_0>0$, με $B(\vec{x},\delta_0)\subseteq U$ ισχύει $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0,\delta_0)$:

$$\forall \vec{h}\in B(\vec{0},\delta)\setminus\{\vec{0}\}: \left|\frac{f_j(\vec{x}+\vec{h})-f_j(\vec{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|}\right|<\varepsilon.$$

$$\Big[\underbrace{\vec{h}\in B(\vec{0},\delta)\setminus\{\vec{0}\}}_{\iff 0<\|\vec{h}\|<\delta} \iff \underbrace{(\vec{x}+\vec{h})\in B(\vec{x},\delta)\setminus\{\vec{x}\}}_{\iff 0<\|\vec{x}+\vec{h}-\vec{x}\|<\delta<\delta_0}\Big]$$

$\implies$ για $\vec{h}=h\vec{e_i}$, $\forall i=1,\dots,n\ (h\in\mathbb{R})$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0)$:

$$\forall h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta): \left|\frac{f_j(\vec{x}+h\vec{e_i})-f_j(\vec{x})-d_{ji}h}{h}\right|<\varepsilon$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{f_j(\vec{x}+h\vec{e_i})-f_j(\vec{x})-d_{ji}\cdot h}{h}=0 \iff$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_j(\vec{x}+h\vec{e_i})-f_j(\vec{x})}{h}=d_{ji}. \implies \boxed{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})=d_{ji}}$$

Παρατήρηση: Αν ερωτηθούμε, αν δοσμένη $\vec{f}:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτό είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}\in U$, υπολογίζουμε στο $\vec{x}$ τον Ιακωβιανό πίνακα $J\vec{f}(x)=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})\right)_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le i\le n}}$

(Δηλ. κάνουμε για τις πραγματικές συναρτήσεις f_j ως προς την πραγμ. μεταβλητή x_i (κρατώντας τις άλλες σταθερές) στο $\vec{x}$

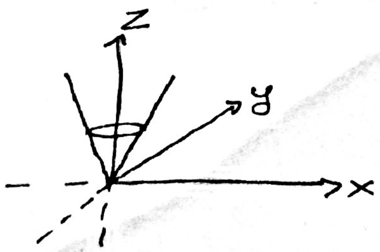
και ελέγχουμε αν ισχύει: $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}}\dfrac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})-J\vec{f}(\vec{x})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|}=0$

Αν ναι τότε η $\vec{f}$ είναι διαφ. στο $\vec{x}$ με παράγωγο $D\vec{f}(\vec{x})=J\vec{f}(\vec{x})$, αν όχι τότε η $\vec{f}$ είναι στο $\vec{x}$ μερικώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow\exists\ J\vec{f}(\vec{x})\in\mathbb{R}^{m\times n}$), αλλά όχι διαφορίσιμη

(Αν $\nexists$ Ιακωβιανός τότε <u>όχι</u> μερικώς διαφ. $\Rightarrow$ όχι

Μέχρι στιγμής είδαμε: $\vec{f}$ διαφ. στο $\vec{x}$ $\underset{\overset{\not\Leftarrow}{③}}{\Longrightarrow}$ $\begin{cases}\vec{f} \text{ συνεχής στο } \vec{x}\\ ①\not\Downarrow \quad \not\Uparrow ②\\ \vec{f} \text{ μερ. διαφ. στο } \vec{x}\end{cases}$

① $f(\vec{x})=\|\vec{x}\|$



συνεχής (στο $\mathbb{R}^n$), όχι μερικώς διαφ. στο 0 $\Rightarrow$ όχι διαφ. στο 0.

② $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0)=0$

όχι συνεχής στο $\vec{0}$ αλλά (ναι) μερικώς διαφ. στο $\vec{0}$.

③ $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\overset{f(0,0)=0}{\text{συνεχής}}$ και μερικώς διαφ. στο $(0,0)$

αλλά όχι διαφ. στο $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(x,y)) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{!}{=} 0 \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \nexists.$$

Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση | 9-12-19

15ο Μάθημα.

Έστω $f\in C[a,b]$ και $x_0,x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ διαφ. μεταξύ τους.

Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n\in \mathbb{P}_n$ της f στα $x_1,x_2,\dots,x_n$ δίνεται σε μορφή Νεύτωνα ως:

$$P_n(x)=\Delta^0(x_0)(f)+\Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0)+\dots+\Delta^n(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

Συμβολίζουμε με $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ το πολ. παρεμβολής της f στα $x_0,x_1,\dots,x_n$ (x_i, $i=0,1,\dots,n$)

Για $n=0$: $P_n(x_0,x)=f(x_0)=\Delta^0(x_0)\cdot(f)$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει ο τύπος για $n-1$. Τότε το $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ γράφεται ως:

$$P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)=P_{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_n,x)+a_n(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

διότι η διαφορά $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)-P_{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)$ έχει ως ρίζες τα $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$.

<u>Θα αποδείξουμε ότι:</u>

$$P(x_0,x_1,\dots,x_n,x)=\frac{(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n,x)-(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)}{x_n-x_0}$$

Για $i=0$, ο τύπος δίνει:

$$\frac{(x_0-x_0)\cdot P_{n-1}(x_1,\dots,x_n,x)-(x_0-x_n)P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)}{x_n-x_0}=f(x_0)$$

Για $i=1,\dots,n-1$ δίνει:

$$\frac{(x_i-x_0)P_{n-1}(x_1,\dots,x_n,x)-(x_i-x_n)P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)}{x_n-x_0}=$$

$$\frac{(x_i-x_0)\cdot f(x_i)-(x_i-x_n)\cdot f(x_i)}{x_n-x_0}=f(x_i)$$

Για $i=n$ δίνει:

$$\frac{(x_n-x_0)P_{n-1}(x_1,\dots,x_n,x)-(x_n-x_n)P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x_n)}{x_n-x_0}=f(x_n)$$

Ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου του $P_n(x_1,\dots,x_n,x)$ θα δίνεται από: $a_n=\dfrac{\text{σ.μ.ο. του } P_{n-1}(x_1,\dots,x_n,x)-\text{σ.μ.ο. } P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)}{x_n-x_0}.$

αλλά σ.μ.ο. του $P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)=\Delta^{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})(f)$, επομένως

$$a_n=\frac{\Delta^{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)(f)-\Delta^{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})(f)}{x_n-x_0}=\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)(f)$$

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	$\dots$	Δ^n
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$			
x_2	$f(x_2)$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	$f(x_n)$	$\Delta^1(x_{n-1},x_n)(f)$	$\Delta^2(x_{n-2},x_{n-1},x_n)(f)$		$\Delta^n(x_0,\dots,x_n)(f)$

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ_3
-1	2			
0	0	-2		
1	0	0	1	
2	8	8	4	1
		$\shortparallel$	$\shortparallel$	
		$\frac{8-0}{2-1}$	$\frac{8}{2-0}$	

$$P_3(x) = 2 - 2(x+1) + 1(x+2)\cdot x(x-1) = x^3 + x^2 - 2x.$$

i) Έστω $i_0, i_1, \dots, i_n$ μια μετάθεση των $0, 1, \dots, n$ τότε

$$\Delta^2(x_0,\dots,x_n)(f) = \Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})(f)$$

Απόδειξη: Η διαιρεμένη διαφορά $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f)$ είναι ο συντελεστής παρεμβολής της f στα $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Η διαιρεμένη διαφορά $\Delta^2(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})(f)$ είναι ο συντ. μεγιστοβάθμιου όρου της παρεμβολής στα ίδια σημεία με διαφορετική σειρά. Λόγω μοναδικότητας θα ταυτίζονται οι συντελεστές μεγιστοβάθμιων όρων (σ.μ.ο.).

ii) Αν $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ τότε $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) = 0$. Η δ.δ. $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ είναι ο συντελεστής του x^n. Επειδή $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ η f θα ταυτίζεται με το πολ. παρεμβολής $P_n \equiv f \in P_{n-1}$ με συντελεστή του x^n να είναι 0.

iii) Έστω $f \in C^n[a,b]$ τότε $\exists\ \xi \in (a', b')$ όπου

$a' = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$b' = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

τέτοιο ώστε: $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Έστω P_{n-1} το πολ. παρεμβολής της f στα $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, τότε από τον τύπο του σφάλματος έχουμε:

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})$$

Απο τον τυπο παρεμβ. του Νευτωνα εχουμε:

$$P_n(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x) = P_{n-1}(x) + \Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x$$

Τότε $f(x_n) = P_{n-1}(x_n) + \Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)\cdot(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})$

Για οποιοδηποτε x_n στο $[a,b]$ διαφορετικό απο τα

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

Θέτοντας x στη θέση του x_n εχουμε:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

Επομενως $\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Θετω ξανά x_n στη θέση του x και εχω το ζητούμενο.

$$\Delta^1(x_0,x_0)(f) = \lim_{x\to x_0} \Delta^1(x,x_0) = f'(x_0)$$

$$\Delta^n(\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{(n+1)}) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + \Delta^1(x_0,x_0)(f) + \Delta^2(x_0,x_0,x_0)(f) + \cdots =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Α.Π. 3. 10-12-19

21º Μάθημα.

<u>Είδαμε χθες:</u> $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$\vec{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\vec{x} \in U$ $\overset{④}{\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}}$ f διαφορίσιμη στο $\vec{x}$

$:\Leftrightarrow \exists \ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς στο $\vec{x}$

<u>④: (Αντι-)Παράδειγμα:</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\|^2 \cdot \sin \dfrac{1}{\|(x,y)\|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Εξετάζω την f στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ το οποίο είναι ανοιχτό [συνεπώς $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\exists \varepsilon > 0 : B((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και άρα μελετώντας τη συνέχεια, διαφορισιμότητα της στο σημείο (x_0,y_0)]

- Μας αρκεί να θεωρήσουμε [να δούμε] τη συνάρτηση που εξετάζουμε σε μια (οσοδήποτε μικρή) μπάλα $B((x_0,y_0),\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ [δηλαδή να την εξετάσουμε τοπικά] και διαπιστώνουμε ότι $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$

<u>Αν</u> $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τότε: f συνεχώς διαφ/μη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow f$ διαφορίσιμη $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής} \\ f \text{ μερ. διαφ.} \end{cases}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Εδώ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(\sqrt{x^2+y^2})$, όπου $h(t) = t^2 \sin\frac{1}{t}$, $t>0$

$\Rightarrow h'(t) = 2t \cdot \sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ = το ίδιο με $x \longrightarrow y$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

[$(x,y) \longmapsto x, y \in C \Rightarrow (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ (νόρμα)]

$\Rightarrow (x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ C ως σύνθεση συνεχών)

$\uparrow$

$\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

πηλίκο συνεχών
συναρτήσεων

[$\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x}$, $\vec{g}$ συνεχής στο $\vec{y} \Rightarrow \vec{g} \circ \vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x}$

$\forall \vec{x}_v \to \vec{x}$ $\vec{f}(\vec{x}_v) \longrightarrow \vec{f}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_v)) \longrightarrow \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$

Ας δούμε αν υπάρχουν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \in \mathbb{R}$.

Εξετάζω το όριο: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{|h|} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cdots = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$. Άρα f μερικώς

διαφ. στο $(0,0)$. Είναι διαφορίσιμη;

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{0}{\cancel{f(0,0)}} - \overset{0}{\cancel{\nabla f(0,0)\binom{x}{y}}}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{(?)}{=\!=} 0$$

Θ.ν.δ.ο. $\underbrace{(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)}_{\Leftrightarrow \|(x_\nu,y_\nu)\| \to 0}$, $0 \leq \|(x_\nu,y_\nu)\| \left|\sin\frac{1}{\|(x,y)\|}\right| \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|(x_\nu,y_\nu)\|}$

Συνεπώς $\nabla f(0,0) = (0,0) = Df(0,0)$ [η f είναι διαφ. στο $(0,0)$]

$\Rightarrow$ Η f είναι διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ συνεχής

σε όλο το $\mathbb{R}^2$ με $Df(0,0) = (0,0)$ και $Df(x,y) = \mathbb{R}^2$ όπως

στα αριστερά του πίνακα $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Επίσης η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

δηλ. ισχύει ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{(???)}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

[και ανάλογα για $\frac{\partial f}{\partial y}$]

$\left(\frac{1}{\nu}, 0\right) \to (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\tfrac{1}{\nu},0\right) = 2\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}} - \frac{\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}} =$$

$$= \underbrace{2\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\sin(\nu)}_{\to 0} - \underbrace{\cos(\nu)}_{\text{Δεν συγκλίνει για } \nu\to\infty.}$$

$\left(\frac{1}{2\pi\nu}, 0\right) \longrightarrow (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1/2\pi\nu, 0\right) = 2\cdot\frac{1}{2\pi\nu}\cdot\sin(2\pi\nu) - \cos(2\pi\nu) = -1 \overset{\nu\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Άρα $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

<u>Θεώρημα 3.2.3:</u> (Άλγεβρα παραγώγων): $\vec{f},\vec{g}: U \to \mathbb{R}^m$, $g: U\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}\in U$, όπου $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτό.

$\Rightarrow$ $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}\cdot\vec{g}$, $\varphi\cdot\vec{f}$, διαφ. στο $\vec{x}$ και:

$$D(\vec{f}+\vec{g})(\vec{x}) = D\vec{f}(\vec{x}) + D\vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

$$\underbrace{\underbrace{D(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x})}_{\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x})}}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}} = \underbrace{\vec{g}(\vec{x})^T}_{\mathbb{R}^{1\times m}}\cdot \underbrace{D\vec{f}(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{m\times n}} + \vec{f}(\vec{x})^T D\vec{g}(\vec{x})$$

$$\underbrace{D(\varphi\cdot\vec{f})(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{m\times n}} = \underbrace{\varphi(\vec{x})}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{D\vec{f}(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{m\times n}} + \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{m\times 1}}\cdot\underbrace{D\vec{g}(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{1\times n}}$$

Απόδειξη: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αν $\vec{f}, \vec{g}, \varphi$ μερικώς διαφορίσιμες στο $\vec{x}$, τότε οι $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}\cdot\vec{g}$, $\varphi\vec{f}$ μερικώς διαφ. στο $\vec{x}$ και ότι ισχύουν οι παραπάνω τύποι αν αντί για τις παραγώγους θέσουμε τους Ιακωβιανούς πίνακες (ή την κλίση για τη $\vec{g}$).

Αρκεί ν.δ.ο. αν αντί για την παράγωγο π.χ. $D(\vec{f}+\vec{g})(\vec{x})$ θέσουμε $D\vec{f}(\vec{x})+D\vec{g}(\vec{x})$ (αυτά υπάρχουν) τότε πράγματι:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{(\vec{f}+\vec{g})(\vec{x}+\vec{h}) - (\vec{f}+\vec{g})(\vec{x}) - (D\vec{f}(\vec{x})+D\vec{g}(\vec{x}))\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{f}(\vec{x})\cdot\vec{h} + \vec{g}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{g}(\vec{x}) - D\vec{g}(\vec{x})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{f}(\vec{x})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} + \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{g}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{g}(\vec{x}) - D\vec{g}(\vec{x})\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{0}+\vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$$ ισχύει.

Ίσως το πιο χρήσιμο!

Θεώρημα για διαφ. συναρτήσεις: Κανόνας της αλυσίδας:

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτά, $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, με $\vec{f}(U) \subseteq V$, $\vec{g}: V \to \mathbb{R}^k$ και $\vec{f}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}$, $\vec{g}$ διαφορίσιμη στο $\vec{y}$ $\Rightarrow$ $\vec{g} \circ \vec{f}: U \to \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}$ και (SUPER SOS)

$$\underbrace{D(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{k\times n}} = \underbrace{D\vec{g}\,(\vec{f}(\vec{x}))}_{\mathbb{R}^{k\times m}} \cdot \underbrace{D\vec{f}(\vec{x})}_{\mathbb{R}^{m\times n}} \quad \text{(Ισχύει και για } n=m=k=1)$$

Απόδειξη: Έστω $A = D\vec{f}(\vec{x})$ και $B = D\vec{g}(\vec{y}) = D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}+\vec{h}) - (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) - B \cdot A \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

[Τεχνικά προαπαιτούμενα για να ορίζονται όλες οι συναρτήσεις

$\exists \delta_1 > 0 : B(\underset{\underset{\vec{f}(\vec{x})}{\parallel}}{\vec{y}}, \delta_1) \subseteq V$. Αφού το U ανοιχτό, $\vec{x} \in U$, και

$\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x}$ (ως διαφ. στο $\vec{x}$) $\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : B(\vec{x}, \delta_2) \subseteq U$ και $\vec{f}(B(\vec{x}, \delta_2)) \subseteq B(\vec{y}, \delta_1) \subseteq V$. [$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{z}$ με $\|\vec{z} - \vec{x}\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{z}) - \vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon$] $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$\forall \vec{z} \in B(\vec{x}, \delta) : \vec{f}(\vec{z}) \in B(\vec{f}(\vec{x}), \varepsilon) \Rightarrow \vec{f}(B(\vec{x}, \delta)) \subseteq B(\vec{f}(\vec{x}), \varepsilon)$

Έστω $\vec{h} \in B(\vec{0}, \delta_2) \setminus \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\vec{\xi} \in B(\vec{0}, \delta_1) \setminus \{\vec{0}\} \in \mathbb{R}^m$

τότε $(\vec{x}+\vec{h}) \in B(\vec{x}, \delta_2) \setminus \{\vec{x}\} \subseteq U$, $\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) \in B(\vec{y}, \delta_1) \subseteq V$

Γνωρίζουμε $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{\overbrace{\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})-A\cdot\vec{h}}^{\varphi(\vec{h})}}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$ <u>και</u>

$$\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0}} \frac{\vec{g}(\vec{y}+\vec{\xi})-\vec{g}(\vec{y})-B\cdot\vec{\xi}}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$$

δηλαδή ισοδύναμα οτι $\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})=\vec{f}(\vec{x})+A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h})$

με $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{\vec{\varphi}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$ <u>και</u>

$\vec{g}(\vec{y}+\vec{\xi})=\vec{g}(\vec{y})+B\vec{h}+\vec{\psi}(\vec{\xi})$, $\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0}} \dfrac{\vec{\psi}(\vec{\xi})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}+\vec{h})=\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}))\Rightarrow$

$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})+A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h}))=\vec{g}(\vec{h})+BA\vec{h}+B\vec{\varphi}(\vec{h})+\vec{\psi}(A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h}))$

Αρα μένει να δείξουμε οτι $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{B\vec{\varphi}(\vec{h})+\vec{\psi}(A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h}))}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$

Αφού $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{\vec{\varphi}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$ και $\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0}} B\cdot\vec{\xi}=\vec{0}$ $[\|B\vec{\xi}\|\leq\|B\|\cdot\|\vec{\xi}\|]$

$\Longrightarrow \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{B\vec{\varphi}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$. Επίσης $\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0}} \dfrac{\psi(\vec{\xi})}{\|\vec{\xi}\|}=\vec{0} \Leftrightarrow$ $\dfrac{\psi(\vec{\xi})}{\|\vec{\xi}\|}=\vec{\psi}_1(\vec{\xi})$

$\vec{\psi}(\vec{\xi})=\|\vec{\xi}\|\cdot\vec{\psi}_1(\vec{\xi})$, με $\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0}} \vec{\psi}_1(\vec{\xi})=\vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{\psi}(A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h}))\|}{\|\vec{h}\|}=\frac{\|A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h})\|\cdot\|\vec{\psi}_1(A\vec{h}+\vec{\varphi}(\vec{h}))\|}{\|\vec{h}\|}$$

Ακόμα, $\exists\, \delta_3 \in (0, \delta_2) : \forall \vec{h} \in B(\vec{0}, \delta_3) \setminus \{\vec{0}\} : \|\vec{\varphi}(\vec{h})\| \leq \|\vec{h}\|$

$$\Rightarrow \forall \vec{h} \in B(\vec{0}, \delta_3) \setminus \{\vec{0}\} : \frac{\|\vec{\psi}(A\vec{h} + \vec{\varphi}(\vec{h}))\|}{\|\vec{h}\|} \leq$$

$$\frac{(\|A\| + 1) \cancel{\|\vec{h}\|} \cdot \|\vec{\psi}_1(A\vec{h} + \vec{\varphi}(\vec{h}))\|}{\cancel{\|\vec{h}\|}} \Rightarrow \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \|\vec{\psi}_1(A\vec{h} + B \cdot \vec{\varphi}(\vec{h}))\| = 0.$$